
NAZIONALE
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE
14
11 1
20

EVCLIDE

RINNOVATO.

[redacted]

EVCLIDE
RINNOVATO,
OVERO
Gl' antichi Elementi della Geometria, ridotti à maggior breuità, e facilità,

In cui con nuouo, e più sicuro modo si dimostra il trattato delle Proporzioni

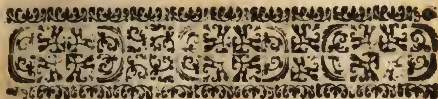
DAL SIG. GIO. ALFONSO BORELLI
Professore delle Mattematiche già nello Studio di Messina, & al presente in quello di Pisa.

Volgarizato da DOMENICO MAGNI Fiorentino, e dall' istesso Autore di nuouo reuisto, e corretto.

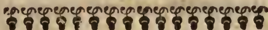


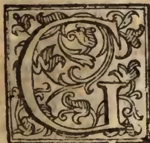
IN BOLOGNA, M.DC.LXIII.

Presso Gio. Battista Ferroni. Con licenza de' Superiori.



IL VOLGARIZATORE
A LETTORI.





Li Elementi della Geometria, se ben si considera, non vscirono alla luce del Mondo in que' primi Secoli, ne tanto copiosi, ne così ben concatenati, e disposti: ma d'età in età senza alcun dubbio vennero ad esser ripuliti, ed accresciuti non poco; fin'à tanto, che da Ippocrate Chio furon in miglior grado ridotti. Non mancarono ancora dopo di lui varij Filosofi di fama non ordinaria, che in diuersi tempi impiegarono volontieri l'opera loro in accrescer-

 li,

li, e correggerli. E finalmente Euclide Megarense tutto intento à raccorli, ed à migliorarli giusta sua possa ad vna gran perfezione gli fè sormontare. Per lo che il Sig. Gio. Alfonso Borelli Autore della rinnouazione di questi Elementi Geometrici si pose anch'egli nell'animo qualche anno fà di voler dimostrare con maniera più speditiua, e più facile l'istesse cose, che di già aueua dimostrato Euclide; ed in particolare il trattato delle Proporzioni, che, come furono di parere gl' Arabi, e frà i nostri moderni il Benedetti, ed alcuni altri, manca di quella euidenza, che le cose Geometriche sogliono, e deuono auere. Il che essendo stato da esso in tutto, e per tutto felicemente adempito; & auendo moltissimi, & in particolare gli Scolari dello Studio Pisano per esperienza prouato quant' vtile, e facilità apportasse loro questo rinnouato Euclide, furono accesi di desiderio più d'vno di vederlo di nuouo comparir

fuori

fuori nella vulgar noſtra lingua, à prò, e consolazione di coloro, che mancheuoli dell'intelligenza della Latina, anno auuto dalla natura ingegno capace di queſta ſcienza, e di eſſa non mediocremente ſon vaghi. Di modo che eſſendo io ſtato più d'vna volta richieſto di volgarizare queſti Elementi Geometrici, non volli da principio à patto alcuno applicarci il penſiero; ne mi ſarei punto da tale riſoluzione allontanato, ſe in vltimo all'inſtanze d'alcuno, che à ciò mi perſuadeua, mi foſſe ſtato lecito di preferire il mio guſto. La qual coſa per più d'vn riſpetto non mi venendo permeſſa; mi diedi à ſeguire con la douuta riuerenza l'altrui: non reputando douermi ciò ſconueneuole riuſcire, ne d'alcun biaſimo, mentre che ne il Pena, ne l'Atellando, ne Federigo Commandino, vomini di tanta ſtima, non ſi ſdegnarono prima di me di prenderſi ſomigliante fatica. Si che conferito prima coll'Autore il

mio proponimento , co'l suo amoreuole, e sincero consiglio m' accinsi all' opera. Ebbe egli per ben fatto, che nel tradurre io lasciassi da parte alcune annotazioni, e dichiarazioni, che sono in quel libro, come quelle, che deuono seruire per gli più auanzati in questa scienza: ed esser fatta questa traduzione solo per gli principianti, in grazia de' quali si messe egli à variare alcune proposizioni, per mezzo delle quali ad essi più s' ageuolasse, e si rendesse più corta la strada intrapresa. E perche la breuità, che ti vien promessa, non t' abbia à fare smarrir l'vso delle Proposizioni d' Euclide, citate ad ogni piè sospinto ne' libri de' Mattematici, hò posto l'Indice di esse, secondo l' ordine di Teone, nel principio di questo libretto, in virtù del quale aurai il comune, e da tutti vsato Euclide. Mi resta adesso di farti sapere, che incontrando in questa traduzione qualche vocabolo non Toscano, e principalmente ne i termini, non

ti deua per questo recar merauiglia : perche se bene aurei potuto per auuentura tutti in questa lingua ridurgli, hò nulladimeno giudicato meglio fatto il lasciargli stare in quella guisa, che sono tutto giorno adoperati da i Professori ; & odonsi oggimai per la tanta domestichezza, come nostrali, pronunziare, poco meno, che da tutti : tanto più che secondo l'insegnamento del Padre della Romana eloquenza, quando à vn traduttore torna meglio in acconcio il nome straniero, che il natiuo senza punto di scrupolo pare che gli si permetta il liberamente valersene. Riceui adunque per ora questi cinque libri de' Piani con lieta fronte: mentre io spero di douer darti in breue volgarizzati quelli de' Solidi, qualunque volta io m' accorga, che questa traduzione ti sia grata.

Viui felice.

PRO-

PROPOSIZIONI D'EVCLIDE

Secondo la forma, & ordine vulgato di Teone, con i luoghi, ne' quali le medesime Proposizioni d'Euclide si ritrouano in quest' Opera.

LIBRO PRIMO.

PRop. 1. Sopra vna data retta linea terminata constituire il triangolo equilatero. Lib.1.prop.1. fac.11

2 Da vn punto dato tirare vna linea retta eguale ad vn' altra linea data, lib. 1. prop.2. 14

3 Date due linee rette disuguali dalla maggiore tagliarne vna eguale alla minore, lib.1.prop.3. 15

4 Se due triangoli anno due lati eguali à due lati, l'vno all'altro, & anno vn' angolo eguale ad vn'angolo, che è contenuto da linee rette eguali: aueranno ancor la base eguale alla base, & il triangolo sarà eguale al triangolo, e gli altri angoli à gl'altri angoli l'vno all'altro, à quali sono sottoposti i lati eguali, lib.1.prop.4. 16

5 Gli angoli de' triangoli equicruri sopra la base sono eguali frà loro, e prolongandosi le linee rette eguali, gli angoli sotto la base saranno ancora frà loro eguali, lib. 1. prop.6. 21

6 Se due angoli d'vn triangolo siano eguali frà loro, etiandio i lati, che sono sotto-

po

19 *Al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato, lib. 1. pr. 20. fac.* 44

20 *Due lati di ciascun triangolo presi in qual si voglia modo sono maggiori del rimanente, lib. 1. pr. 21.* 45

21 *Se da i termini d'vno lato del triangolo si constituiscano due linee rette di dentro: queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma côterranno l'angolo maggiore, lib. 1. prop 22.* 47

22 *Da tre linee rette, che siano vguali à tre rette linee date constituire vn triangolo; ma bisogna, che due siano maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo; percioche due lati di ciascun triangolo, presi in qual si voglia modo, sono maggiori del rimanente, lib 1. pr. 23.* 48

23 *Nella data retta linea, e nel punto dato in essa constituire vn'angolo rettilineo vguale ad vn'altr' angolo rettilineo dato, lib. 1. pr. 24. fac.* 50

24 *Se due triangoli anno due lati vguali à due lati l'vno all'altro, e l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da linee rette vguali, aueranno ancora la base maggior della base, lib. 2. corol. 2. della pr. 6.* 82

25 *Se due triangoli anno due lati vguali à due lati l'vno all'altro, & la base maggior della base, aueranno ancora l'angolo maggiore dell'angolo, che da lati vguali è contenuto, lib. 2. cor. 2. della prop. 6.* 82

26 *Se due triangoli anno due angoli vguali à due angoli l'vno all'altro, & vn lato vguale ad vn lato, che è frà gli angoli vguali, ò che è sottoposto ad vno delli vguali angoli, aueranno ancora gli altri lati vguali à gli altri lati l'vno all'altro, & l'angolo rimanente vguale al rimanente, lib. 1. prop 25.* 51

27 *Se cadendo vna linea retta sopra due linee rette, fà gli angoli alterni vguali frà loro, saranno le linee rette parallele,*

LIBRO II.

1 SE sono due linee rette, delle quali vna sia segata in quante parti si voglia- no, il rettangolo contenuto dalle due linee è eguale alli rettangoli, che si contengono dalla linea non segata, e da ciascuna parte dell'altra, lib. 4. scho. pr. 1. 192

2 Se vna linea retta sia segata in qual si voglia modo, i rettangoli contenuti da tutta la linea, e da ciascuna delle parti sono eguali al quadrato, che si fà da tutta la linea, lib. 4 schol. pr. 1. 192

3 Se vna linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da vna parte di essa sarà eguale al rettangolo, che si contiene dalle parti, & al quadrato, che si fà dalla detta parte, lib. 4. schol. pr. 1. fac. 192

4 Se vna linea retta sia segata in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea sarà eguale alli quadrati delle parti, & al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti, lib. 5. pr. 19. 280

5 Se vna linea retta sia segata in parti eguali, & in parti disuguali, il rettangolo cõtenuto dalle parti disuguali insieme col quadrato della linea, che è frà li segamenti, sarà eguale al quadrato della metà di tutta la linea, lib. 5. prop. 22. 284

6 Se vna linea retta sia segata per mezzo, e vi s'aggiunga qualch'altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea con la giunta, e dalla giunta insieme col quadrato della metà, sarà eguale al quadrato, che si fà dalla metà, e dalla giunta, sì come da vna linea sola, lib. 5. prop. 22. 284

7 Se vna linea retta sia segata in qualunque modo, i quadrati che si fanno da tutta la linea, e da vna parte sono eguali al rettangolo contenuto due volte da tutta la linea, e dalla detta parte insie-

me col quadrato dell' altra parte lib 5.prop 20. 282

8 Se vna linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, & da vna delle parti insieme col quadrato dell'altra parte, sarà vguale al quadrato, che si fà da tutta la linea, & dalla detta parte, si come da vna linea sola, lib 5.pr.21. 283

9 Se vna linea retta sia segata in parti vguali, & in parti disuguali, i quadrati, che si fanno dalle parti disuguali, sono doppij del quadrato della metà, & del quadrato di quella linea, che è frà gli segamenti, lib.5 pr 23. 286

10 Se vna linea retta sia segata per mezzo, & vi si aggiunga vn'altra linea per diritto, i due quadrati, che si fanno da tutta la linea con la giunta, & dalla giunta sono doppij del quadrato della metà, & del quadrato, che si fà dalla metà, & dalla giunta, si come da vna sola linea, lib. 5.pr.23. 286

11 Segare vna linea retta data talmente, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, & da vna delle parti sia vguale al quadrato dell' altra parte, lib.4.pr.25. 233

12 Ne' triangoli ottusiangoli, il quadrato, che si fà dal lato sottoposto all' angolo ottuso, è tanto maggiore delli quadrati fatti da i lati, che l'angolo ottuso comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da vno de' lati, che sono d'intorno all' angolo ottuso, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare, & dalla linea presa di fuori della perpendicolare verso l'angolo ottuso, lib.5.prop.28. 296

13 Ne' triangoli acuti angoli, il quadrato che si fà dal lato sottoposto all' angolo acuto, è tanto minore delli quadrati fatti da i lati, che l'angolo acuto comprendono quãto è il rettangolo contenuto due volte da vno de lati, che sono d'intorno all' angolo acuto, cioè da quello, nel quale

LIBRO III.

renza concaua, la maggiore di tutte sarà quella, che passa per lo centro, & dell' altre la più vicina à quella che passa per lo centro, sarà sempre maggiore della più lontana: ma di quelle che cadano sopra la circonferenza curua, la minore sarà quella, che è frà il punto preso, & il diametro, & dell' altre la più vicina alla minore sarà minore della più lõtana: & due sole vguali cadano dal punto nel cerchio dall' vna, & l'altra parte della minore, lib.2.prop 6. fac. 78

9 Se dentro al cerchio si pigli qualche pũto, & da quello sopra il cerchio caschino più di due linee rette vguali, il punto preso sarà centro del cerchio, lib.2. cor.1. della pr. 6.fac. 82

10 Vn cercho non sega vn' altro cerchio in più di due pũti, lib 2 prop.7. 83

11 Se due cerchi si tocchino di dentro, & si piglino i lor centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento, lib.2. prop.8. 84

12 Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta, che congiunge i centri loro passerà per lo toccamento, lib.2.prop. 8.fac. 84

13 Il cerchio non tocca vn' altro cerchio in più d'vn punto, ò lo tocchi di dentro, ò di fuori, lib.2.pr.9. 85

14 Nel cerchio le linee rette vguali sono vgualmente distanti dal centro, & quelle che sono vgualmente distanti dal centro, sono frà loro vguali, lib.2.pr 10. 87

15 Nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, & dell' altre sempre la più vicina a quella, che passa per lo centro è maggiore della più lontana, lib.2 pr.11. 89

16 Quella linea, che dalla estremità del diametro è tirata ad angoli retti cade fuori del cerchio, e nel luogo che è frà la linea retta, e la circonferenza non cade alcun' altra linea, e l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d' ogn' an-

giore, & la minore alla minore, lib.2.pr.18. 102

29 *Ne' cerchi vguali, sotto l'vguali circonferenze, son poste linee rette vguali, lib.2. prop 18.* 102

30 *Diuidere vna data circonferenza per mezzo, lib 2. prop.19.* 104

31 *Nel cerchio, l'angolo che è nel mezzo cerchio è retto: & quello, che è nella maggior porzione è minore del retto: & quello che è nella minor porzione è maggiore del retto: oltre a questo l'angolo del la porzion maggiore è maggiore del retto; & l'angolo della porzion minore è minore del retto, lib.2.prop. 20 fol.* 106

32 *Se vna linea retta tocca il cerchio, & dal toccamẽto nel cerchio sia tirata vna linea retta, che lo seghi, gli angoli che ella fà con la linea, che tocca, sono vguali a quelli che si costituiscono nell'altre porzioni del cerchio, lib.2. prop.24.* 112

33 *Constituire vna portione di cerchio nella data linea retta, che pigli l'angolo vguale all'angolo rettilineo dato, lib.2 pr.25.* 115

34 *Dal dato cerchio tagliare vna porzione, che pigli l'angolo vguale all'angolo rettilineo dato lib.2.pr.26.* 116

35 *Se nel cerchio due linee rette si taglino frà loro, il rettangolo contenuto dalle parti d'vna è vguale al rettangolo, che si contiene dalle parti dell'altra, lib 4.prop. 22 fol.* 225

36 *Se fuori del cerchio si pigli qualche punto; & da quello cadano nel cerchio due linee rette, delle quali vna seghi il cerchio, & l'altra lo tocchi, il rettangolo contenuto da tutta la linea, che sega, & dalla parte presa di fuori, frà 'l punto, & la circonferenza curua, è vguale al quadrato della linea, che tocca, lib.4 prop.22.* 226

37 *Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, & da quello cadano nel cerchio due linee rette, vna delle quali*

LIBRO IV.

LIBRO V.

 dal

dall'vna della parte tratta dall' altra, sarà la rimanente moltiplice della rimanente, come tutta di tutta, lib. 3. cauasi dalla pr. 15. 162

6 Se due grandezze sieno vgualmente moltiplici di due altre grãdezze, & siano tratte da' loro parti vgualmente moltiplici delle medesime, saranno le rimanenti, ò vguali alle medesime, ò vgualmente moltiplici di esse, lib. 3 cauasi dalla prop 22. 176

7 Le grandezze vguali alla medesima anno la medesima proporzione, & la medèsima alle vguali, lib. 3. prop. 3. fac. 141

8 Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima hà maggior proporzione, che la minore: & la medesima alla minore hà maggior proporzione, che alla maggiore, lib 3. pr. 2. 139

9 Quelle grandezze, che alla medesima anno la medesima proporzione sono vguali frà loro, & quelle alle quali la medesima hà la medesima proporzione, sono ancora frà loro vguali lib 3 pr. 4. 143

10 Delle grandezze, che anno proporzione alla medesima, quella che hà maggior proporzione, è maggiore; & quella, alla quale la medesima hà maggior proporzione, è minore, lib. 3 pr. 5. 144

11 Quelle proporzioni, che sono le medesime ad vna medesima, sono ancora le medesime frà loro, lib. 3. prop. 7. fol. 147

12 Se quante grandezze si vogliono siano proporzionali, come vna dell' antecedenti è ad vna delle conseguenti così saranno tutte l'antecedenti a tutte le conseguenti, lib. 3. prop. 15. 162

13 Se la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la terza alla quarta, & la terza alla quarta abbia maggior proporzione, che la quinta alla sesta, ancora la prima alla seconda auerà maggior proporzione, che la quinta alla sesta, lib. 3 propos 6. 145

Se

a due

à due a due nella medesima proporzione, saranno ancora per la proporzione vguale nella medesima proporzione, lib. 3 prop. 19. 169

23 *Se siano tre grandezze, e siano altre grandezze di numero eguali a quelle, che si piglino a due a due nella medesima proporzione, e sia l'analogia loro perturbata, saranno ancora per la proporzione eguale nella medesima proporzione, lib. 3. prop. 20. fac.* 172

24 *Se la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la terza alla quarta, e la quinta alla seconda abbia la medesima proporzione, che la sesta alla quarta, auerà ancor composta la prima, e la quinta alla seconda la medesima proporzione, che la terza, e la sesta alla quarta, lib. 3. prop. 22.* 176

25 *Se quattro grandezze siano proporzionali, la maggiore di tutte, e la minore saranno maggiori delle due rimanenti, lib 3. pr. 16.* 164

LIBRO VI.

1 *I Triangoli, e parallelogrammi, che anno la medesima altezza, sono frà loro come le basi, lib. 4. prop. 1. fac.* 189

2 *Se nel triangolo sia tirata vna linea retta parallela ad vn lato, quella segherà i lati di detto triãgolo proporzionalmẽte, e se i lati del triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che congiunge i segamenti sarà parallela all'altro lato del triangolo, lib. 4. prop 2.* 193

3 *Se vn'angolo del triangolo sia segato per mezzo, e la linea retta, che lo sega, seghi ancor la base, auranno le parti della base la medesima proporzione, che gl'altri lati del triangolo; e se le parti della base abbiano la medesima proporzione, che gl' altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima si tira sino al segamento della base, segherà l'angolo ꝑ mezzo, l. 4. p. 3.* 195

I lati

4 I lati de' triangoli equiangoli, che stanno d'intorno à gli vguali angoli sono proporzionali frà loro, & i lati homologhi, ouero della medesima ragione sono quelli, che à gli angoli vguali si sottopongono, lib.4 pr.4. 196

5 Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno ancora equiangoli, & haueranno vguali quegl' angoli, à quali i lati homologhi si sottopongono, lib 4 pr.5. 198

6 Se due triangoli abbiano vn' angolo vguale ad vn' angolo, & d'intorno à gl'vguali angoli habbiano i lati proporzionali; saranno detti triangoli equiangoli, & aueranno vguali quegli angoli, à quali gli vguali lati si sottopongono, lib.4.prop.6. 199

7 Se due triangoli abbiano vn' angolo vguale ad vn' angolo, & d'intorno alli altri angoli abbiano i lati proporzionali, & delli rimanenti l'vno, & l'altro insieme, ò sia minore, ò non minore del retto; saranno detti triangoli equiangoli; & aueranno vguali quegl'angoli, intorno à quali sono i lati proporzionali, lib.4 pr.8. 202

8 Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli, che le stanno d'intorno, & à tutt' il triangolo & frà loro son simili, lib. 4. pr.9. 204

9 Dalla data retta linea tagliare vna parte proposta, lib.1 prop.28. 57

10 Segare vna data retta linea, non segata, conforme ad vn'altra segata, lib.4.propos.12. 207

11 Date due linee rette, trouar la terza proporzionale, lib.4.pr.10. 205

12 Date tre linee rette, trouare la quarta proporzionale, lib.4.pr.11. 206

13 Date due linee rette, trouare la proporzionale di mezzo, lib.4 pr.10. 205

14 De' parallelogrammi vguali, ch'anno vn' angolo vguale ad vn' angolo; i lati d'intorno à gl'angoli vguali si ri-

rispondono frà loro contraria mente : & quei parallelo grammi, ch' anno vn'angolo vguale ad vn'angolo, de'quali i lati d'intorno a gli angoli vguali si rispondono contrariamente, sono frà loro vguali, lib 4 pr.14. 210

15 *De' triangoli vguali, ch' anno vn'angolo vguale ad vn'angolo; i lati d'intorno a gli angoli vguali si rispondono frà loro contrariamente; & quei triangoli, ch' anno vn' angolo vguale ad vn' angolo, de' quali i lati d' intorno a gli vguali angoli si rispondono cõtrariamente, sono vguali frà loro, lib.4.pr.14.* 210

16 *Se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dall' estreme è vguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo; & se il rettangolo contenuto dall'estreme sia vguale al rettangolo, che si contiene da quella di mezzo, le quattro linee rette saranno proporzionali, lib.4.cor. 1.dalla prop. 14.* 212

17 *Se tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dall' estreme è vguale al quadrato, che si fà di quella di mezzo; & se il rettangolo contenuto dall' estreme sia vguale al quadrato, che si fà da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali, lib. 4 cor. 2. della prop. 14.* 213

18 *Dalla data retta linea descriuere vn rettilineo simile, & similmente posto ad vn rettilineo dato, lib. 4. prop. 16.* 215

19 *I triangoli simili sono in proporzione doppia di quella, ch' anno i lati homologhi frà loro, lib.4. pr.15.* 214

20 *I poligoni simili si diuidono in simili triangoli, & vguali di numero, & homologhi a tutti; & il poligono al poligono, hà proporzione doppia di quella, che hà il lato homologo al lato homologo, lib. 4.prop.17.* 218

21 *I rettilinei simili ad vn medesimo rettilineo, sono ancora simili frà loro, lib 4.*

cor.

cor.della pr.16. 117

22 *Se quattro linee rette siano proporzionali, i rettili nei ancora, che si fanno da esse simili, & similmente descritti, saranno proportionali: & se i rettilinei, che si fanno da esse simili, & similmente descritti siano proporzionali, le linee rette ancora sarãno proporzionali, lib.4 pr.18.* 220

23 *I parallelogrãmi equi angoli anno frà loro la proporzion composta da i lati, lib. 4.pr.13.* 208

24 *D' ogni parallelogrãmo i parallelogrammi, che son d'intorno al diametro, & al tutto, & fra loro son simili, lib.4.pr.19.* 221

25 *Constituire vn rettilineo simile ad vn dato rettilineo, & vguale ad vn' altro dato, lib.4.pr 21.* 225

26 *Se dà vn parallelogrammo si tragga vn parallelogrammo simile al tutto, & similmente posto, che abbia vn'angolo comune con esso; quello sarà d'intorno al medesimo diametro col tutto, lib.4.pr 19.* 221

27 *De' parallelogrammi adattati alla medesima linea retta, & che mancano di figure parallelogramme simili, & similmente poste à quella, che si descriue dalla metà, il maggiore di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà; essendo simile al mancamento, lib. 4. cauasi dalla prop.24.* 231

28 *Alla retta linea data adattare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che manchi d'vna figura parallelogramma, simile ad vn' altra data. Ma bisogna, ch'il dato rettilineo, al quale si deue adattare vn parallelogrammo vguale, non sia maggior di quello, che s' adatta alla metà, essendo simili i mãcamenti, & quello che si fà dalla metà, & quello al quale deue esser simile il mancamento, lib 4 pr.24.* 231

29 *Alla retta linea data adattare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che ecceda d'vna figura pa-*

parallelogramma simile ad vn'altra data, lib.4.prop.24. fac. 231

30 *Segare vna data linea retta terminata secondo l'estrema, & mezza proporzione, lib.4.pr.25.* 233

31 *Ne' triangoli rettangoli, la figura che si fà dal lato sottoposto all'angolo retto, è vguale alle figure fatte dai lati, che l'angolo retto contengano, simili, & similmente descritte, lib.5.prop. 18.* 279

32 *Se due triangoli siano composti ad vn'angolo, & abbiano due lati proporzionali a due lati, talmente che i lati loro rispondenti siano ancor paralleli, saranno gli altri lati de' triangoli posti per dritto frà loro, lib.4 pr.7.* 200

33 *Ne' cerchi vguali gli angoli anno la medesima proporzione, che le circonferenze sopra le quali si fermano, ò siano alli centri, ouero alle circonferenze: & oltre a ciò i settori ancora, come quelli che sono posti alli centri, lib. 5.prop.11.* 262

LIBRO X.

1 *Proposte due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tragga vna parte maggior della metà; & da quello, che rimane similmente si tragga vna parte maggiore della metà & ciò si faccia sempre, alla fine rimarrà vna certa grandezza, la quale d'ogni minor grandezza proposta sarà minore, lib. 2. prop 27.* 117

12 *Quelle grandezze, che sono commensurabili ad vna medesima grandezza, sono ancora fra loro commensurabili, lib.3. cor.della prop. 17. fac.* 167

117 *Sia proposto di dimostrare nelle figure quadrate, il diametro al lato esser in lunghezza incommensurabile, lib.2.prop.29.* 121

LIBRO XII.

1 *I Poligoni simili, che si descriuono ne' cerchi, sono*

LIBRO XIII.



DI EVCLIDE RINNOVATO

Da Gio. Alfonso Borelli.

LIBRO I.



A Geometria, frà tutte le Matematiche discipline principalissima, considera le grandezze, & qualsiuoglia contemplazione scientifica, che circa à tal soggetto può farsi; ò si raggira intorno alla considerazione della struttura, con la quale esse grandezze vengon formate, ò intorno alla considerazione dell' essenziali proprietà, ò vogliam dire passioni delle medesime. Ora conciosia cosa, che alcune strutture, e proprietà di grandezze siano in natura così facili, ed euidenti, che non solamente niun faticoso ricercamento non addimandano, ma chi che sia il quale dirittamente discorra, tosto loro acconsente; ed essendouene altre ancora per il contrario tanto malageuoli, che non si possono, ò debbono in modo alcuno concedere senza proua: e perche insieme con esso noi è nato l'incaminarci per vna strada, che dalle cose, che ci son note, ne conduca alle ignote (generandosi

ogni dottrina intellettiua da vna qualche precedente cognizione): quindi è, che l'euidenti strutture, e proprieta delle grandezze deuon da noi pigliarsi come principij, da'quali scientificamente discorrendo, l'altre oscure, e difficili si deduchino.

Somiglianti speculazioni, ò facili, ò difficili ch'elle siano, furono poi sempre chiamate proposizioni; essendo che in quasiuoglia di loro si propone al nostro intelletto qualche cosa da cõtemplarsi. E' noto adunque, che i principij della Geometria sono le proposizioni, che spongono vn'euidente struttura, ò proprietà delle grandezze. E perche molte volte accade, che le dette grandezze, le cui strutture, ò proprieta sono euidenti, ò non abbiano il proprio nome, ò pur ne abbiano alcuno equiuoco, e diuerse cose significante, è però necessario (acciò che qualsiuoglia grandezza resti da qualunque altra distinta) l'assegnare à ciascheduna, che ne sia senza, vn nome con il quale possa chiamarsi, e circa à quelle che l'anno, dichiarar d'esso il proprio, e vero significato. Laonde tre saranno i generi de' principij della Geometria; de i quali il primo sarà quello nel quale si dichiara, ò si assegna il nome à qualche grandezza, che abbia vn'euidente struttura, ò manifesta proprietà: E si chiama Diffinizione.

Il secondo, nel quale si spone qualche struttura euidente di quella grandezza, il nome della quale è stato gia assegnato, e riceuuto dall'vso:

E si

E si chiama Petizione, ò vogliã dire Domanda.

Il terzo, nel quale si manifesta vn' euidente proprieta di vna grandezza già nominata: E si chiama Dignita, ò Asioma, ò Pronunciato, ouero notizia commune.

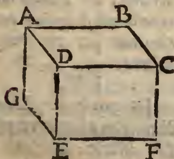
E perche somiglianti principij, essendo notissimi, non si possono dimostrare; perciò si porrà solamente il catalogo loro nel fronte di questa scienza, acciò poi (argomentando con sillogismi dimostratiui) se ne cauino da loro le verità dell' altre nascoste proposizioni, le quali ancora si suddiuidono; poiche quelle nelle quali si considerano le strutture difficili delle grandezze si addimandano Problemi.

Ma quelle nelle quali si cõtemplano le difficili proprietà delle medesime, si chiamano Teoremi.

DIFFINIZIONI.

I.

L'Estremità, ò termini di qualunque corpo considerati dall' intelletto senza profondità, si chiamino Superficie.



Quali sono le ABCD, & DEFC.

II.

I termini di qualunque superficie cõsiderati senza niuna larghezza, si chiamino Linee.

Quali sono le AB, & AD.

 L'estre-

III.

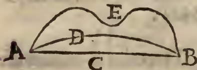
L'estremità della linea considerate senza alcuna lunghezza, si chiamino Punti.

Quali sono i termini A, e B.

Benche tali quantità non si possano ritrouare ciascheduna da per se distinta; certa cosa è, che si ritrouano veramente ne' corpi, ed è lecito considerare l'vna senza l'altra; perche in qualsiuoglia corpo quello, che si vede, ò tocca è la sola esteriore superficie; e quando ei si riuolge intorno à se medesimo, vi è pure qualche cosa, che non si muoue, distinta da quelle, che si riuoltano: Ne è possibile, che la parte immobile sia corpo, auuenga che tutto il corpo si muoue: onde necessariamente conuiene, che vna sola linea semplicemente lunga sia quella, intorno alla quale si fà il moto: i termini indiuisibili della quale si chiaman punti.

E' dunque cosa assai manifesta, che la linea può esser generata dal continuo, e successiuo muouimento del punto; la superficie dal cammino transuersale della linea; e finalmente il corpo del moto pur trasuersale della superficie.

Le quali tre specie di quantità continua possono da noi imaginarsi di grandezza infinita, se però ci imagineremo, che i detti loro mouimenti si vadano continuando per vno spazio infinito.



IV.

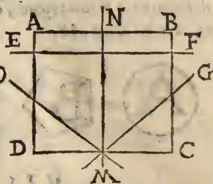
La più breue Linea di quelle, che da vn pūto ad vn' altro possono esser distese: la chiamo Retta.

Come

Come la linea ACB se ella è la breuissima frà le ADB, & AEB, la chiamo Retta.

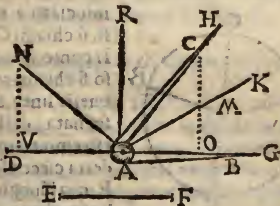
V.

La superficie, alla quale vna medesima linea retta per tutti i versi si può adattare, chiamisi Piana.



Se alla superficie ABCD, si può adattare la retta linea MO, in maniera, che conbaci per tutti i versi, come in MN, MG &c. si chiami Superficie Piana.

VI.

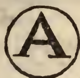


Di due rette linee, che si tocchino in vn punto, e non siano distese in dritto; la quantità, ò misura dell'inclinazione dell'vna verso l'altra; si chiami Angolo Piano.

Se le due rette linee AB, & AC si tocchino in A, e

non siano poste in dritto, chiamo angolo piano, non la quantità delle linee BAC, ne lo spazio compreso da esse, ne la distanza, ò relazione loro, ma quella tanta e determinata inclinazione, ò piegamento della linea AC, verso l'altra AB.

VII.



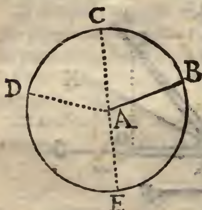


La superficie piana contenuta da vno, ò più termini, si chiami Figura.

Quali sono le A, e B.

VIII.

La figura, che è descritta dal riuolgimento d'vna linea retta posta in vn piano intorno ad vn'estremo suo punto fisso, fin tanto che ella ritorni à quel medesimo luogo, donde auea cominciato à muouersi, si chiami Cerchio. Il punto, che resta fisso si chiami centro, e quella linea, che è disegnata dall'altro estremo termine, sia detta circonferenza: E qualsiuoglia retta linea tirata dal centro alla circonferenza del Cerchio, si nomini suo Raggio, ouero Semidiametro.

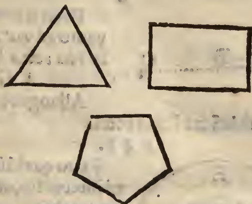


Se la retta AB sarà riuoltata intorno al suo punto fisso A, dirassi la superficie BDE cerchio, la linea curua BCDE circonferenza; il punto A centro, la retta AB Raggio, ò Semidiametro.

Le

IX.

Le figure piane, le quali ſon contenute da rette linee, ſi chiamino Rettilinee.



X.

E quelle, che ſon contenute da tre rette linee ſi nominino Trilatere, ouero Triangoli.

XI.

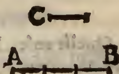
Le contenute da quattro Quadrilatere, ouero Quadrangoli.

XII.

E finalmente le contenute da maggior numero ſi dicano Moltilatere, ouero Poligone, prendendo il nome dalla moltitudine de' lati, che le contengono, ò degli angoli, che ſono in eſſe.

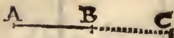
XIII.

Vna grandezza ſi chiama miſura d'vn'altra, quando ella preſa molte volte, le è eguale per l'appunto.



PETIZIONI, OVERO DOMANDE.

I.

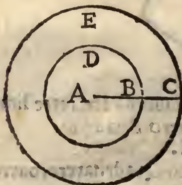


Poterſi tirare da vn punto ad vn'altro pũto vna retta linea.

I I.

Allungare à dirittura la medeſima linea retta.

I I I.



Fatto qualſiſia cẽtro, ed interuallo, deſcriuere vn cerchio.

I V.

E data qualſiuoglia grandezza poterſene intendere vn'altra maggiore, o minore della medeſima.

Non eſſendo tali operazioni Meccaniche, ma intellettuali, non à dubbio, che ſia lecito far le, non richiedendoſi altra operazione, che applicar la mente à quelle tali grandezze, che ſono veramente in natura.

ASSIOMI, OVERO PRONVNCIATI.

I.

Quelle coſe, le quali ſono eguali ad vna medeſima, ſono eguali tra loro. E quella, che è maggiore, o minore dell'vna dell'eguali; è anche

che maggiore, o minore dell'altra. E per il contrario.

I I.

Se á cose eguali sono aggiunte cose eguali, gli aggregati saranno eguali.

I I I.

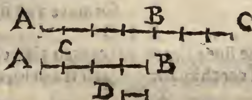
E se da cose eguali son leuate cose eguali, le rimanenti saranno eguali.

I V.

Le cose eguali aggiunte, ò tolte via da cose diseguali, le rendono disegua li.

V.

Le cose, che sono doppie triple, &c. ouero la meta d'vna cosa medesima, o di cose eguali, sono ancor'esse eguali.



V I.

Se vna medesima grãdezza misura due grandezze, misurerà ancora il composto loro, e la loro differenza.

V I I.

Il tutto è maggiore della sua parte.

V I I I.

Il tutto è eguale à tutte le sue parti insieme prese.

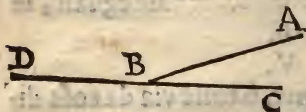
Quel-

I X.

Quelle cose, che si combaciono, o si adattano perfettamente, sono eguali fra loro.

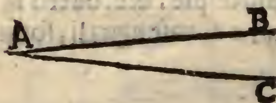
E quelle cose, che sono eguali potranno combaciarsi per opra dell' intelletto, trasportando, ouero piegando le loro parti, se sara di mestieri.

X.



Due rette linee, che concorrino, e si seghino l'vna l'altra, non anno alcuna parte cō-mune.

X I.



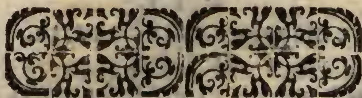
Due rette linee possono si comporre vn' angolo, ma non già chiudere vno spazio, o formare vna figura.

X I I.

Tutte le linee tirate dal centro alla circonferenza del cerchio, sono eguali tra di loro.

X I I I.

Se vna medesima retta linea sara tutta collocata dentro due figure, aueranno quelle figure qualche parte commune, e si segheranno scambieuolmente.



PRO.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

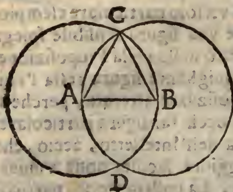
Sopra vna data retta linea terminata formare vn triangolo, che abbia tutti e tre i suoi lati eguali; e nominisi poi tal figura Triangolo equilatero.

Euclid, prop. 1. del lib. 1.

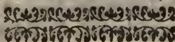
I Problemi anno per lo più cinque parti, cioè a dire, Proposizione, Esposizione, Costruzzione, Dimostrazione, e Conclusione. La Proposizione palesa la cosa data, ouero concessa, & in oltre dichiara tutto quello, che deue farsi. L'Esposizione con vn solo particolare esempio, ouero con qualche vna figura sensibile spiega quello, che s'era detto nello nella Proposizione, ne per questo in somigliante figura resta l'vniuersalità della proposizione alterata, perche si mette dauanti a gli occhi tal figura particolare, solo per men fatica dell'intelletto, acciò, che egli con molto maggiore facilità possa vniuersalmente discorrere. La costruzzione, particolarmente ne'problemi, è mai sempre necessaria; Auuengache ella mette in esecutione quello, che nella Proposizione si comanda, che sia fatto, ò più tosto considera l'intellettuale operazione, mediante la quale tal costruzzione formale sciẽtificamente si può comprendere. La Dimostrazione, argomentando dimostratiuamente da primi principij, raccoglie legittimamente essere sta-

ta fatta la costruzione già comandata. E finalmente la Conclusione è vn certo epilogo di tutta la proposizione, che ci auuertisce, essere stato ormai fatto quello, che nella proposizione s'imponeua, che si facesse. Ne stimo essere stata cosa superflua l'auer accennato in questa prima proposizione per vna volta solamente le cose predette, le quali, benche in altre proposizioni non si pongono, vi si deono non di meno intender sempre.

ESPOSIZIONE.



Sia dunque la data retta linea AB, sopra di lei si dee formare il triangolo, che habbia tutti, e tre i suoi lati eguali. Questa linea AB, benche sia di vna tale determinata misura, contuttociò l'intelletto la deue comprendere come rappresentatiua di qualsiuoglia dell'infinite, che si posson proporre.



COSTRVZIONE.

FAtto centro A in virtù della terza domanda, con l'interuallo della retta AB, si descriua il cerchio CDB. In oltre fatto centro B con l'interuallo della medesima retta BA, *a* si descriua l'altro cerchio CAD. E perche la medesima retta linea AB è tutta collocata dentro ambedue i cerchi CBD, & CAD. Adunque (mediante l'assioma tredicesimo) questi due cerchi si segano scambieuolmente: e perciò ancora le circonferenze si segheranno l'vna l'altra in qualche punto per esser linee, che per larghezza non si possono diuidere. Posto adunque, che il punto del segamento sia C, *b* tirisi dal punto A al punto C vna retta linea, e parimente se ne tiri vn'altra dal punto B al punto medesimo C. Quiui resta perfezzionata la costruzione, auendo noi formato la figura trilatera ABC, la quale dico essere ancora di lati eguali.

a *Dom.* 3.

b *Dom.* 1.

DIMOSTRAZIONE.

PErche le due rette linee AB, & AC son tirate dal centro A alla circonferenza del cerchio BCD: *c* adunque la retta AC è eguale alla retta AB. Di più perche le rette BC, & AB son tirate dal centro B alla circonferenza del cerchio CAD, *d* la retta BC sarà eguale alla medesima retta BA. Adunque così la AC, come la CB

c *Ass.* 12.

d *Ass.* 12.

sono

c *Ass.*1. sono eguali alla medesima retta AB. Per la qual cosa e la AC, & la CB sono eguali tra di loro. Et le tre rette linee AB, BC, & CA, le quali chiuggono il triangolo ABC sono tutte eguali.

CONCLVSIONE.

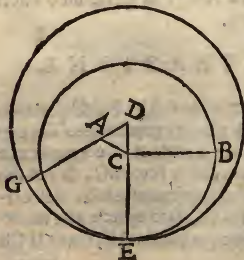
ADunque sopra la data retta linea AB abbiamo formato vn Triangolo racchiuso da tre lati eguali, il che nella proposizione ci era comandato che douessimo fare. Chiamisi ora cotal figura Triangolo Equilatero.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II.

Da vn punto dato, tirare vna retta linea eguale ad vn' altra data retta linea.

Euclide prop. 2. del 1.



a *Do.n.*1.

SIa il dato punto A, e la data retta linea sia BC. Dal punto A si deue tirare vn' altra retta linea, che sia eguale alla retta BC. *a* Dal punto C al punto A si tiri, se e ve n'è di bisogno, vna retta linea, *b* e so·

b e sopra la retta CA, si descriua il triãgolo equilatero ADC, *c* e fatto centro C con l'interuallo CB, si descriua il cerchio BE, *d* e la retta DC si allunghi dirittamente alla volta del punto C, finche seghi nel punto E la circonferenza del cerchio. E similmente *e* fatto centro D, con l'interuallo DE, si descriua l'altro cerchio EG, che seghi la retta linea DA, allungata indefinitamente nel punto G. Dico la retta AG essere eguale alla data retta BC. Perche le rette DE, e DG son tirate dal centro alla circonferenza del cerchio EG: *f* esse dunque sono eguali tra di loro. Ma da queste si leuino via le parti eguali AD, & CD (lati del triangolo equilatero ABC) *g* adunque il residuo AG è eguale al residuo CE. Ma anche la retta CB è eguale alla retta CE, *h* per essere ambedue tirate dal centro alla circonferenza del cerchio BE. Adunque le due rette BC, & AG sono eguali ad vna terza CE, e *i* perciò anco sono eguali trà di loro. Per la qual cosa si è distesa dal punto A la retta AG eguale alla data BC. Il che si doueua fare.

b *prop.* 1.
c *Dom.* 3.
d *Dom* 2.
e *Dom.* 3.
f *Ass.* 12.
g *Ass.* 3.
h *Ass.* 12.
i *Ass.* 1.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III.

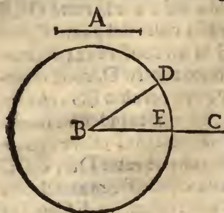
Date due rette linee diseguali, dalla maggiore tagliarne vna eguale alla minore.

Euclid. prop. 3. *del* 1.

Sia A la retta linea minore, CB la maggiore. Deuesi dalla maggiore CB tagliare vn pezzo

a *Prop. 2.* zo eguale alla minore A *a*. Si tiri dal punto B la retta linea BD, che sia eguale alla retta A, *b* e

b *Dem. 3.* fatto centro B con lo interuallo BD, si descriua il cerchio DE, che seghi nel punto E la retta CB. Dico che BE è il pezzo tagliato eguale alla retta A. Perche BE è eguale à BD, *c* essendo ambedue queste tirate dal



c *Ass. 12.* centro alla circonferenza del cerchio DE: e A per la costruzzione è eguale alla medesima BD. Onde A, e BE essendo eguali ad vna terza *d* saranno parimente eguali tra loro, Adunque date due rette linee &c. Il che si doueua fare.

d *Ass. 1.*

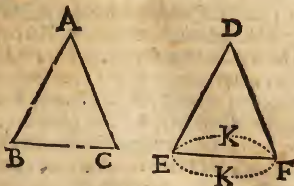
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA I.

Euclid. prop. 4. del 1.

Se in due triangoli intorno à gli angoli della cima eguali, i due lati dell'vno saranno eguali à i due lati dell'altro ciascheduno al suo: le base de i medesimi Triangoli saranno eguali, il triangolo al triangolo, e di tutti gli altri angoli quegli ad vno ad vno saranno eguali fra di loro, à i quali saranno opposti lati eguali, Chiaminsi somiglianti figure Triangoli similmente Eguali.

Sie-



Siano due triangoli ABC, & DEF, i di cui angoli alla cima A,& D siano eguali tra loro, e il lato AB sia eguale al lato DE; e similmẽte il lato AC sia eguale al lato DF. Dico che la base BC è vguale alla base EF, il triangolo ABC eguale al triãgolo DEF, e l'angolo B eguale all'angolo E, à i quali sono opposti i lati eguali AC,& DF, e parimente l'angolo C è eguale all'angolo F, a'quali sono opposti gli altri due lati eguali AB,& DE. Soprapongasi con l'intelletto il triangolo ABC al triangolo DEF, dimando che il punto A cada sopra il punto D, e la retta AB cada sopra la retta DE, necessariamente *a* le due rette linee AB, & DE si combascieranno, similmente mediante l'equalità l'angolo A si adatterà all'angolo D; e perciò AC caderà sopra DF, *b* e per essere tra loro eguali si adatteranno; sì che il punto C caderà sopra il punto F. Poste queste cose, dico che le base BC, & EF si combaciano. Poiche se ciò non è vero cadano le parti del mezzo della BC sopra, ouero sotto la EF, come per esempio nel

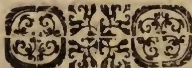
a *Ass.9.*

b *Ass.9.*

B sito

fito EKF. E noto che in tal caso le due rette linee EF, & EKF chiuderebbono la superficie EKF, *c* il che affatto è impossibile. Nõ può adunque la base BC cader sopra, ò sotto la base EF, qualora i punti estremi B, & C, cadono precisamente sopra i punti E, & F. Laonde necessaria cosa è, che le basi BC, & EF si adattino, e *d* per ciò saranno tra di loro eguali. Similmente i triangoli ABC, & DEF si combaciono, poiche sono superficie piane, tutti gli estremi delle quali si adattano, onde è anche necessario, che le loro parti di mezzo ancor elleno si combacino, *e* altrimēti la retta linea non s'adatterebbe per ogni verso all'vna, e all'altra superficie piana, la qual cosa è inconueniente. Adunque i triangoli ABC, & DEF son'anch'essi eguali tra loro. *f* Finalmente gli angoli B, & E, a i quali sono opposti i due lati eguali AC, e DF adattandosi fra di loro vengano ad essere eguali, e g per la stessa ragione sono anco eguali gli angoli C, & F, à i quali similmente sono opposti i due lati eguali AB, e DE. Per la qual cosa se in due triangoli &c. Le quali cose bisognaua dimostrare. Ora chiaminsi per breuità queste due figure Triangoli similmente eguali.

c *Ass.* 11.
d *Ass.* 9.
e *Deff.* 15.
f *Ass.* 9.
g *Ass.* 9.

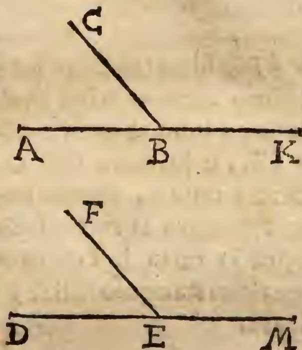


PRO-

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA II.

Due angoli, che son conseguenti di due angoli eguali, ouero conseguenti del medesimo angolo, sono eguali fra di loro.

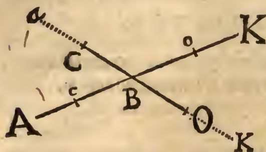


SIano i due angoli ABC, e DEF trá loro eguali; e prolungate in diritto le rette linee AB, & DE verso le parti degli angoli B, & E fino à i punti K, ed M. Dico che gli angoli CBK, & FEM, che sono conseguenti degli angoli sopradetti sono eguali trá di loro. Perche l'angolo DEF si suppone eguale all' angolo ABC. Adunque soprapposta intellettualmente la retta DE alla retta AB, & il punto E al punto B, *a* gli stessi angoli DEF, & ABC si adatteranno; e perciò la retta EF caderà precisamente sopra la retta BC: ma la retta EM cade sopra la retta BK, conciosia che le rette *b* DE, & AB allungate fino ad M, & K combaciandosi fra di loro non possono auere vna parte commune. Adũque gli angoli FEM, & CBK

a *Ass.* 9.

b *Ass.* 10.

c *Ass.9.* & CBK si adateranno, e per *c* ciò saranno eguali. Nel secondo luogo si allunghino le rette linee AB, & CB del solo angolo ABC alla volta dell' angolo B fino á i punti K, & O. Dico che ambedue gli angoli conseguẽti CBK, & ABO sono trà di loro eguali. S'intenda il medesimo angolo ABC posto à rouescio sopra se stesso, in modo che la retta AB cada sopra la retta CB, e la retta CB cada sopra la retta AB. Chiara cosa è, che la retta *d* BK cade precisamente sopra la retta BO, e la retta OB caderà sopra la retta KB. Onde l'angolo ABO sarà eguale all'angolo CBK; il che bisognaua dimostrare.



d *Ass.10.*

COROLLARIO.

Euclid. prop. 15. del 1.

Di quì si raccoglie, che due rette linee, che si seghino fanno gl' angoli alla cima eguali trà di loro.

Impercioche segandosi le due rette linee AK, & CO scambieuolmente nel punto B abbiamo dimostrato i due angoli alla cima ABO, & CBK, i quali erano conseguenti dell' angolo ABC essere eguali frà di loro. Nella stessa maniera

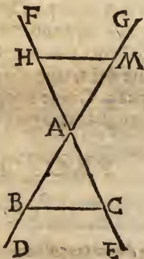
niera i due angoli alla cima ABC, & KBO saranno eguali essendo eglino conseguenti del medesimo angolo ABO.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA III.

Gli angoli sopra la base d'vn triangolo, che abbia due lati eguali, sono tra loro eguali, & allungati i lati eguali in diritto saranno eguali, eziandio gli angoli sotto la base. Chiamisi poi tal figura Triangolo Isoscele. Euclid. prop. 5. del 1.

SIa il triangolo ABC, i lati eguali del quale siano BA, & CA. Dico che gli angoli ABC, & ACB sopra la base sono eguali trà loro; e che allũgate in dritto le rette linee AB, & AC sotto la base fin'à D, & E, gli angoli DBC, & ECB sono eziandio eguali trà loro. *a* Si allunghino indefinitamente i lati BA, & CA verso le parti della cima A, cioè à dire fino à G, & F: e sì della retta AG, come della retta AF *b* si taglino le rette AM, & AH ciascheduna eguale alla stessa AB, ouero alla AG, e si *c* congiunga la retta HM. E perche i due triango-



a Dom.2.

b Prop.3.
c Corol. prop.5.

d Corol. prop. 5. li BAC, HAM intorno a gli angoli *d* eguali BAC, HAM (per essere alla cima) anno i lati eguali ad vno ad vno tra di loro, mediante la costruzione.

e Prop. 4. *e* Adunque l'angolo CBA è eguale all'angolo MHA (essendosi fatti eguali i loro opposti lati MA, & CA). Per la medesima ragione *f* l'angolo ACB sara eguale al medesimo angolo MHA (essendosi similmente fatti eguali i lor lati opposti BA, & MA). Per la qual cosa i due angoli ABC, & ACB sono eguali ad vn terzo MHA: e *g* per ciò trà di loro. Sono dunque eguali gli angoli sopra la base del dato Triangolo. Il che primieramente bisognaua dimostrare.

f Prop. 4.

g Ass. 1.

h Prop. 5. In oltre perche i due angoli ABC, & ACB si sono dimostrati eguali, *h* adunque gli altri due loro conseguenti DBC, & ECB, i quali sono sotto la base saranno anch'essi eguali trà di loro. Per la qual cosa è manifesto, che i due angoli sotto la base del triangolo di due lati eguali sono trà loro eguali. Come bisognaua prouare. Si chiami ora somigliante figura triangolo Isocele.

PROPOSIZIONE VII.

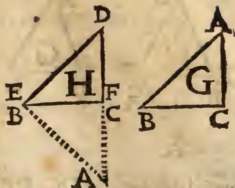
TEOREMA IV.

Euclid. prop. 8. del lib. 1. *Se due triangoli aueranno trè lati eguali à tre lati, ad vno ad vno saranno similmente eguali.*

SIano i due triangoli G, & H, & il lato AB sia eguale al lato DE, AC à DF, e BC ad EF.

Dico

Dico che l'angolo A è eguale all'angolo D, l'angolo B all'angolo E, e l'angolo C all'angolo F. S'intenda il triangolo G con il suo lato BC collocato sopra il lato FE, di modo

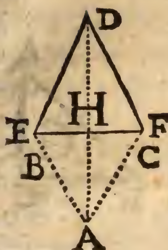


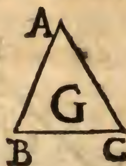
che il punto B cada precisamente *a* sul punto E, e mediante l'egualita de i detti due lati, il punto C caderà sul punto F. Et il triangolo ABC cada non sopra l'altro triangolo DEF, ma verso la parte à lui opposta. E' noto, che gli altri lati cõfinanti saranno eguali. Si *b* congiunga finalmente la retta AD, la quale passerà ò per il punto C, ouero segherà la base commune BC, ò caderà fuori di essa. Nel primo caso essendo i due lati AB, & BD nel triangolo DAB eguali, mediante la suppositione, *c* lo stesso triangolo sarà Isoscele, e perciò i due angoli A, & D sopra la base saranno eguali trà di loro; & in virtù della quarta proposizione i medesimi triangoli G, & H saranno similmente eguali.

a *Ass. 9.*
b *Dom. 9*
c *Prop. 6.*

Ma nel secondo caso il triangolo ADB parimente sarà Isoscele; *d* onde i due angoli BAD, & BDA saranno eguali. E per la medesima ragio-

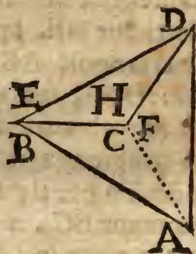
d *Prop. 6.*

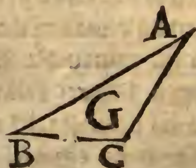




ne nel triangolo isoscele CDA i due angoli CAD, & CDA anch'essi saranno eguali. Adunque *e* se à i primi angoli eguali si aggiugneranno altri secondi eguali, i due angoli BDC, & BAC si saranno fatti trà loro eguali.

e *Ass.* 3.





Finalmente nel terzo caso da gli angoli eguali BDA, & BAD con il leuar via gli angoli eguali CDA, & CAD, si lascerãno i due angoli BDC, & BAC eguali tra di loro; onde *f* ancor gli altri angoli rimanenti saranno eguali. Per la qual cosa se due triangoli &c. Il che bisognaua &c.

f *Prop.* 4.

PRO-

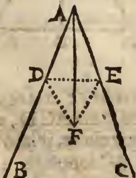
PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA IV.

Diuidere per il mezo vn dato angolo. *Euclid. prop. 9. del 1.*

SIa l'angolo rettilineo BAC, deue questo angolo diuidersi in due angoli eguali. Si prenda nella retta AB qualsiuoglia punto D; & dalla *a* AC allungata indefinitamente se ne tagli *b* AE eguale ad AD, e si cōgiunga la retta *c* DE, sopra la quale verso le parti opposte *d* si descriua il triāgolo equilatero DFE. Finalmente *e* dal punto A al punto F si tiri la retta linea AF. Dico che AF scioglie il Problema. Perche ne' due triāgoli DAF, & EAF, il lato AF è commune, & i lati DA, & AE sono eguali, mediante la costruzione, & le basi DF, & EF sono eguali ancor esse, essendo lati di vn triangolo equilatero. Adunque in virtù della passata proposizione gli angoli DAF, & EAF sono eguali tra di loro. Si che dalla retta AF viene ad esser diuiso per il mezo l'angolo BAC. Laonde conforme si era proposto abbiam diuiso per il mezzo vn'angolo dato. Il che &c.

a *Dom.* 2.
b *Prop.* 3.
c *Dom.* 1.
d *Prop.* 1.
e *Dom.* 1.

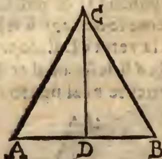


PRO-

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA V.

Euclid. 9. del 1. *Tagliare per il mezo vna data retta linea terminata.*



Sia la data retta linea terminata AB: deue questa diuidersi in due parti eguali. a Sopra essa si descriua il triangolo equilatero ACB, il cui angolo alla cima C b si seghi per il mezo dalla retta CD, che diuida la base AB nel punto D. Dico che il punto D è quello, che si cercaua.

a Prop. 1.

b Prop. 8.

Perche ne' triangoli ACD, & BCD gli angoli alla cima ACD, e BCD sono eguali per la costruzzione, il lato CD è commune, & i lati AC, & BC sono eguali, essendo lati di vn triangolo equilatero. Adunque la base c AD è eguale alla base BD. Onde abbiamo tagliato per il mezzo la retta linea AB nel punto D. Il che &c.

c Prop. 4.



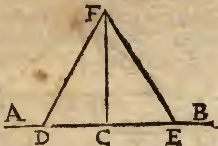
PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA VI.

Data vna retta linea, eleuare da vn dato punto di essa vna retta linea, che faccia gli angoli conseguenti eguali trà di loro. Si chiami l' vno, e l'altro de gli angoli eguali angolo Retto; e la retta linea eleuata si chiami perpendicolare à quella, sopr' alla quale essa è eleuata. *Euclid. 11. del 1.*

SIa la retta AB, & il punto in lei dato C, dal quale si deue eleuare vna linea retta, che faccia con la retta AB gli angoli conseguenti eguali tra loro. Si prenda qualsiuoglia punto D, & dall'altra parte si tagli dalla *a* CB allungata la linea CE eguale alla CD, *b* e sopra la DE si descriua il triangolo equilatero DFE. Finalmente dal punto C al punto F si tiri vna retta linea FC. Dico che la retta FC è quella, che si cercaua. Perche i due triangoli DCF, & ECF anno il lato CF commune, & i lati DC, & EC eguali per la costruzzione, e similmente le basi FD, & FE eguali per esser elleno lati di vn triangolo equilatero. Adūque *c* gli angoli FCD, & FCE sono eguali tra di loro, conforme di fare si era

a *Prop.* 3.
b *Prop.* 1.
c *Prop.* 7.



ſi era propoſto. Chiaminſi ora ambe due gli eguali angoli ACF, e BCF angoli Retti, e la FC ſi nomini Perpendicolare alla retta AB.

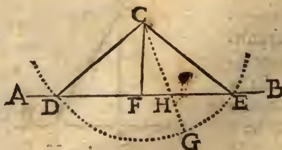
PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA VII.

Euclid. 12. del 1.

Sopra vna data retta linea non terminata tirare ad vn punto dato, che non ſia in eſſa vna retta perpendicolare.

SIa AB la retta indefinita, & il punto C fuori di eſſa. Si deue tirare dal punto C vna perpendicolare ſopra l'AB. Si pigli nella retta AB
a *Dom.1.* qualſiuoglia punto H, *a* e ſi congiunga la retta
b *Dom.2.* CH, e s'allunghi *b* in dritto, tanto che paſſi oltre la retta AB, come per eſempio fino al punto G,
c *Dom.3.* e fatto *c* centro C con lo interuallo C G ſi deſcriua il cerchio EG D, la circonferenza del quale neceſſariamente ſegherà la retta AB, imperciochè il punto G del raggio CG fù collocato di là dalla retta AB. La tagli adunque ne i punti D, & E; di poi *d* ſi tagli
d *Prop. 9.* per mezzo la retta DE nel punto F, e ſi ſtendino



no le rette linee CF, CD, & CE. Dico che la CF è la perpendicolare ricercata.

Perche ne' triangoli DFC, & EFC il lato CF è commune, & DF è eguale ad FE mediante la costruzione, e parimente le basi CD, e CE sono eguali, *e* essendo state tirate dal centro alla circonferenza del cerchio DGE. Adunque *f* gl'angoli DFC, & EFC sono eguali tra di loro, e perciò *g* son retti. Onde CF sarà perpendicolare alla AB. Adunque dal punto dato C abbiamo tirato vna perpendicolare alla retta linea AB. Il che &c.

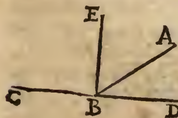
e *Ass.* 12.
f *Prop.* 7.
g *Prop.* 10.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA V.

Quando vna retta linea posta sopra vn'altra retta linea vi fà due angoli conseguenti, ò ella gli fà retti, ò eguali à due retti. Ma degli angoli disequali quello che è maggiore del retto, si chiami ottuso, e quello, che è minore del retto si chiami acuto.

Euclid. 13. *lib.* 1.



STia la linea retta AB sopra la retta CD, e faccia gli angoli ABD, & ABC conseguenti. Si deue dimostrare, che ambedue, ò sono retti, ò che insieme presi sono eguali à due retti. Poiche se la retta AB è perpendicolare alla

retta

a Prop.10 retta CD, *a* gli angoli conſeguenti ſaranno due
b prop.10 retti, ſe nò l'vno ſarà minore dell'altro. *b* Si ele-
ui dunque dal punto B la linea EB perpendicola-
re alla CB, i due angoli cõſeguenti EBC, & EBD
ſaranno retti. Perche l'angolo retto EBD è
c Aſſ.2. *c* eguale à due angoli DBA, & ABE inſieme pre-
ſi. Adunque aggiunto communemente l'angolo
d Aſſ.2. retto EBC, *d* i due angoli retti DBE, & EBC in-
ſieme preſi, ſaranno eguali à i tre angoli DBA,
ABE, & EBC inſieme preſi. In oltre perche l'an-
e Aſſ.8. golo CBA *e* è eguale à i due angoli CBE, & EBA
inſieme preſi. Adunque aggiuntoui commune-
f Aſſ.2. mente l'angolo ABD *f* la ſomma de i due angoli
CBA, & ABD ſarà eguale alla ſomma de i trè an-
goli DBA, & ABE, & EBC; ma alla medeſima
ſomma de i detti trè angoli fù dimoſtrata eguale
g Aſſ.1. la ſomma de i due retti CBE, & EBD *g* e ſono
eguali tra di loro quelle coſe, che ſono eguali ad
vna terza. Adunque la ſomma de i due angoli
CBA, & ABD ſara eguale alla ſomma de i due
angoli retti. Per la qual coſa, quando vna retta
linea &c. Il che ſi &c.



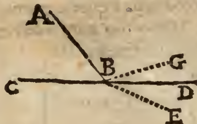
PRO-

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA VI.

Se la somma di due angoli conseguenti fatti dal concorso di tre rette linee in vn punto sarà eguale à due angoli retti: le due estreme rette linee saranno costituite in dritto. Euclid. 14. lib. 1.

LE tre rette linee AB, CB, e DB concorrono nel punto B, e la somma de i due angoli conseguenti ABC, & ABD sia eguale a due retti. Dico che le CB, & BD sono poste in dritto, cioè cõpongano vna sola linea retta. Imperciochè se CBD non è vna sola retta linea, si distenda in dritto la a CB verso la parte B, la quale caderà, ò dalla parte di sopra, ò di sotto della BD. Cada prima dalla parte di sopra se può caderui, e sia esempi grazia CBG, è manifesto per la passata proposizione, che la somma de i due angoli CBA, & ABG sarà eguale à due retti; mà per la nostra suppositione la somma de i due angoli CBA, & ABD è ancor essa eguale à due retti. Adunque l'aggregato di due angoli CBA, & ABG è eguale alla somma de due angoli CBA, & ABD, e toltone via l'angolo commune CBA, b l'angolo ABD a Dem. 2 b Ass. 3.

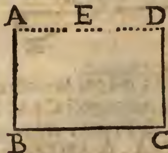


ABD resterà eguale all'angolo ABG, il tutto alle parte, c che è impossibile. Adunque la retta CB allungata non cade dalla parte superiore della retta BD. Ne anche può cadere dalla parte inferiore della medesima, come verbigrazia in CBE. Imperciòche nel medesimo modo si mostrerebbe, che gli angoli ABD, & ABE sarebbeno tra loro eguali, la parte al tutto, il che di nuouo è impossibile. Si che la CB distesa in dritto passerà precisamente per la BD, e perciò la CBD sarà vna sola retta linea. Il che conueniua dimostrare.

c Ass.7.

ASSIOMA XIV.

Se vna retta linea trasferita lateralmẽte nello stesso piano sopra d'vn'altra retta linea la tocchi sempre mai coll'estremo suo punto, & in tutto il suo corso sia à quella perpendicolarmente eleuata: l'altro suo punto estremo descriuerà col suo moto vna linea retta.



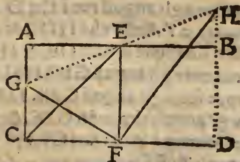
Perche se la retta linea AB col suo punto estremo B toccando sempre mai la retta BC, sarà alla trasportata lateralmente nel medesimo piano, eleuata in tutto il suo corso perpendicolarmente sopra la retta BC, non hà dubio, che l'altro suo punto estremo A col suo moto descriuerà

vna retta linea, quale è AED: poiche tutti i punti di tal linea AED sono remoti dalla retta BC con interstizij eguali misurati dalla retta AB, e però sono tali punti disposti con il medesimo ordine equabile, conforme si conseguitano i punti della retta BC, i quali sono ordinati in quella guisa, che richiede il flusso breuissimo, che costituisce vna retta linea.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA VII.

Se à due rette linee poste nel medesimo piano, vna medesima retta linea sarà perpendicolare: qualsiuoglia altra retta linea tirata dall' vna perpendicolarmente sopra dell'altra sarà eguale à quella terza, e similmente posta, e perpendicolare alla rimanente.

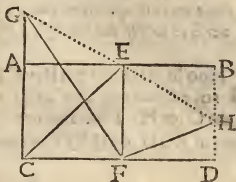


Sia la retta linea EF perpendicolare ad ambedue le rette AB, & CD poste nel medesimo piano, e da qualsiuoglia pũto A della retta linea AB, cada sopra la retta GD la perpendicolare AC, incontrandola in C. Dico primamente, che la AC è vna retta linea

eguale ad EF, e similmente posta. Imperò che, se ciò nõ è vero, dalla medesima parte della retta CD, alla quale riguarda la retta EF, *a* sia distesa
a *Prop.3.* la retta CG fatta eguale alla FE. Non caderà il punto G in A, per essersi conceduta AC, non eguale ad EF, ò pure alla CG, ò non similmente posta. *b* Facciasi poi la FD eguale à CF, ed in-
b *La stes-sa.* tendasi la GC trasportata lateralmente fino al punto D, radendo col suo punto estremo C tutta la lunghezza della retta CD, sopra la quale per tutto il suo corso si mantenga perpendicolarmẽte eleuata, e nel medesimo piano: *c* Necessaria-
c *Ass.14.* mẽte il punto G nel suo moto descriuerà la retta linea GEA, la quale passerà per il pũto E; poiche
d *Ass.9.* la GC arriuãdo alla EF, *d* vi si adatterà essendole eguale. E di più la retta GE segherà la retta linea AE per essere il punto G in altro sito che A; e perciò l'angolo GEF non sara eguale all'angolo AEF. Finalmente congiunganſi le rette linee GF, & HF. Perche i due triangoli GCF, & HDF intorno à gli angoli retti C e D anno il lato GC
e *Prop.4.* eguale, e l'istesso che HD, & il CF eguale alla DF. *e* Adunque le base GF, & HF sono eguali, e parimente gli angoli GFC, HFD sono eguali tra
f *Ass.3.* loro, e sono gli angoli CFE, DFE retti. *f* Adunque gl'angoli rimanẽti GFE, & HFE sono egua-
g *Prop. 4.* li, e intorno à loro i lati GF, HF si sono dimostra-
h *Prop. 10.* ti eguali, & EF è commune. *g* Adunque gl'angoli GEF, & HEF sono eguali tra loro, e *h* perciò retti. Mà anche l'angolo AEF per la ipotesi era retto. Adunque gli angoli GEF, & AEF sono egua-
li

li tra loro, mà furono dimostrati ineguali, il che è impossibile. Adunque è impossibile, che la AC non sia vna retta linea eguale ad EF, distesa dalla medesima parte, alla quale riguarda la stessa EF; e però ella sarà tale come fù proposto.

Secondariamente dico, che l'angolo CAE è retto. Perche la retta CF è perpendicolare alle due rette AC, & EF, e l'altra retta AE è perpẽdicolare alla EF vna di quelle stesse. Adunque, come nel primo caso fù mostrato, la retta AE sarà eguale alla CF, che è perpendicolare, sì all'vna, come all' altra. Si distenda di poi la retta EC. Perche ne triangoli AEC, & FCE il lato AC è eguale all' FE, & AE è eguale alla FC, e la base CE è commune. *i* Adunque l'angolo retto EFC è eguale l'angolo CAE. Laonde l'angolo CAE sarà retto come era stato proposto. Si chiamino ora le rette linee CD, & AB Parallele, ò equidistanti, e la EF perpendicolare all'vna, e all'altra, si chiami distanza delle parallele.



i Prop. 7.

PROPOSIZIONE XV.

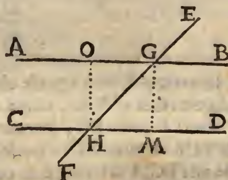
TEOREMA VIII.

Euclid. 29.del li. 1.

Vna retta linea che seghi due parallele, farà gli angoli alterni eguali, e l'esteriore eguale all'interiore opposto, e verso le medesime parti, e gl' interiori volti verso le medesime parti farà eguali à due retti.

SIano le rette linee AB, e CD parallele tra loro, e siano tagliate dalla retta linea EF ne punti G, & H. Primamente dico, che gli angoli alterni AGH, e DHG sono eguali tra loro. *a* Si tiri dal punto G la retta GM perpendicolare alla retta CD, che la seghi in M, e dal punto H si tiri la HO perpendicolare all'AB, che la tagli nel punto

a *Prop.* 11



O. E perche le due rette AB, e CD sono parallele, e la GM è perpẽdicolare ad vna di quelle, cioè alla CD; *b* farà eziandio la medesima GM perpendicolare all'altra AB; & è la HO perpendicolare alla AB; Adunque come nella precedente proposizione fù mostrato, farà l'interposta OH eguale alla GM, e parimente l'interposta

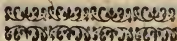
b *Prop.* 14

GO

GO farà eguale alla MH. Onde ne' triangoli OHG, MGH; i due lati GO, & HO sono eguali à due lati HM, & GM ad vno ad vno, e la base GH è commune. *c* Adunque gli angoli alterni DHG, & AGH sono eguali tra loro, e parimente i *d* loro compimenti à due retti, cioè gl'angoli BGH, e EHG saranno eguali trà loro. c *Prop.* 7. d *Prop.* 5.

Secondariamente dico, che l'angolo esteriore EGB è eguale all'angolo GHD interiore opposto, e collocato verso le medesime parti. Perche *e* in virtù delle parallele AB, e CD, gl'angoli alterni DHG, & AGH sono eguali trà loro, *f* e l'angolo EGB è eguale al medesimo angolo AGH alla cima. *g* Adũque l'angolo EGB è eguale all'angolo GHD. e *Parte* 1. *di questa.* f *Corol. prop.* 5. g *Ass.* 1.

Nel terzo luogo dico che i due angoli AGH, e CHG interiori, e posti verso le medesime parti sono eguali à due retti. Perche à cagione delle parallele, i *h* due angoli alterni AGH, e DHG sono trà loro eguali, *i* aggiunto communemente l'angolo CHG, i due angoli AGH, e CHG insieme presi saranno eguali a i due angoli DHG, e CHG, ma questi *l* insieme sono eguali à due retti. Adunque i due angoli AGH, e CHG sono eguali à due retti. Tutte le quali cose bisognaua dimostrare. h *Part.* 1. *di questa.* i *Ass.* 2. l *Prop.* 12



PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA IX.

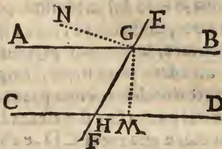
Eucl. 27. e 28. del 1. *Se cadendo vna retta linea sopra due rette farà gl'angoli alterni eguali fra loro, ouero l'angolo esteriore, eguale all'interiore oposto, e volto verso le medesime parti, ò farà i due angoli interiori dalle medesime parti eguali à due retti: quelle due rette linee saranno parallele tra loro.*

SE la retta linea EF segando le due rette linee AB, e CD farà primamente gl'angoli alterni AGH, e DHG eguali tra loro. Dico le rette linee AB, e CD esser parallele. Imperciò che
a prop. 11 se ciò non è vero, dal punto G si *a* tiri la retta linea GM perpendicolare alla CD, segandola in
b prop. 10 M, e dal punto G *b* si eleui la retta GN perpendicolare alla stessa GM. E perche la medesima retta linea GM è perpendicolare alle due rette
c prop. 14 linee CD, & NG, *c* le linee rette CD, & NG saranno parallele fra loro: ma la AB fù reputata non parallela alla stessa CD, adunque la NG cade sopra, ò sotto della retta AG. Poi perche le parallele NG, e CD son segate dalla retta linea
d prop. 15 EF ne' pũti G, & H, *d* i due angoli alterni NGH, e DHG saranno eguali tra loro, ma l'angolo AGH si suppose eguale al medesimo angolo DHG.
e Ass. 1. *e* Adunque gli angoli NGH, & AGH sono e-
f Ass. 7. guali tra loro la parte al tutto, *f* il che è impossi-

bile.

bile. Adunque nessuna altra retta linea, fuor che la stessa AB può esser parallela alla CD.

Sia nel secondo luogo l'angolo esteriore EGA eguale all'angolo GHC interiore, e volto alle medesime parti, dico che le rette AB, e CD sono parimente parallele; perche l'angolo CHG si suppone eguale al l'angolo AGE, & g è l'angolo BGH eguale al medesimo angolo AGE alla cima. *h* Adunque i due angoli CHG, e BGH alterni, saranno eguali trà loro, e per la prima parte di questa propositione le rette linee AB, e CD saranno parallele. g *Corol. prop.5.* h *Ass.1.*



Siano nel terzo luogo gli angoli interiori alle medesime parti AGH, e CHG eguali à due retti. Dico similmente le rette AB, e CD esser parallele, perche i due angoli AGH, e CHG si suppongono eguali à due retti, *i* e sono eziandio eguali à due retti i due angoli DHG, e CHG cōseguenti. Adunque la somma de i due angoli AGH, e CHG è eguale alla sōma de i due angoli DHG, e CHG, e *k* toltone via communemente l'angolo CHG, i due angoli AGH, e DHG alterni saranno eguali trà loro, e per ciò, per la prima parte, le rette AB, e CD saranno parallele. Le quali cose bisognaua dimostrare. i *Prop.12* k *Ass.3.*

COROLLARIO.

Euclid. prop. 31.

Cauasi il modo, come da vn punto dato si possa tirare vna retta linea, che ad vn'altra data sia parallela. Atteso che se dal dato punto *l* si tira vna perpendicolare alla data retta linea, e *m* se dal medesimo punto si solleua vn'altra perpendicolare, sopra quella prima perpendicolare, la seconda perpendicolare sarà parallela alla data retta linea. Imperciò che nella costruttione della prima parte di questa propositione dal punto G; si è tirata la retta GM perpendicolare alla retta CD, e l'altra GN perpendicolare alla stessa MG, si è dimostrata parallela alla stessa CD.

l *Prop. 12.*

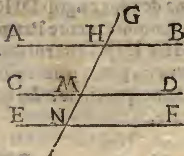
m *Prop. 10.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA X.

Euclid. 30. del 1.

Quelle rette che son parallele alla medesima retta linea, sono anche parallele trà loro.



SI' la CD, come la EF siano parallele alla medesima AB. Dico che le CD, & EF sono eziandio parallele tra loro. Vengan tutte tagliate dalla retta GN ne pun-

punti H, M, N. Perche la CD, e la AB si suppongono parallele. *a* Adunque gli angoli alterni AHM, & DMH sono eguali trà loro. In oltre perche la EF, e la AB sono parallele. *b* Adunque gli angoli alterni AHN, & FNH, sono trà loro eguali. *c* E però i due angoli HMD, & MNF sono eguali tra loro, essendo eguali all'angolo medesimo AHM. Ma essendosi dimostrato nelle due rette CD, & EF l'angolo esteriore HMD eguale all'interiore, & opposto verso le medesime parti MNF. *d* Adunque le due rette linee CD, & EF saranno eziandio parallele trà loro. Per le quali cose &c.

a *Prop.* 15
b *prop.* 15
c *Ass.* 1.
d *prop.* 16

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XI.

Prodotto vn lato di qualsiuoglia triangolo, l'angolo esteriore è eguale à due interiori, & opposti. E i tre suoi angoli interiori sono eguali à due retti.

Euclid. 32. *del* 1.

DI qualsiuoglia triangolo ABC, il di cui lato BC sia prodotto verso C fin à D. Primamente dico, che l'angolo DCA esteriore è eguale alla somma de i due interiori, & opposti A, e B. Dal pũto C *a* si tiri la CE parallela alla AB. Perche la AC sega ambedue le parallele AB, e CE. *b* Adunque l'angolo ECA è eguale all'angolo alterno A; nella medesima guisa la BD segando le due paralleli AB, & EC, *c* farà l'angolo esterio-

a *Corol. prop.* 16.
b *prop.* 15
c *prop.* 15

re

re DCE eguale all'angolo B interiore, opposto, e verso le medesime parti. Laonde i due angoli DCE, & ECA insieme presi, *d* cioè l'angolo esteriore DCA sarà eguale alla somma de i due angoli B, & A.

d *Ass.8.*

Secondariamente dico, che la somma de i tre angoli interiori A,B, & ACB del medesimo triangolo, sono eguali à due retti. Perche l'angolo DCA esteriore, si è dimostrato eguale alla somma de i due interiori, & opposti A, e B. Adunque *e* agiuntoui communemente l'angolo ACB, la somma de i due angoli DCA, & ACB, sarà eguale alla somma de i tre angoli A,B, & ACB *f* Ma i due angoli DCA, & ACB sono eguali a due retti. *g* Adunque la somma de i tre angoli A, B, & ACB sono eguali à due retti. Il che bisognaua &c.

e *Ass.2.*
f *Prop.12*
g *Ass.1.*

COROLARIO.

Euclid. prop.16. 17. del lib.1.

Quindi si caua l'angolo esteriore esser maggiore di qual si voglia interiore, & opposto, & i due angoli interiori di qual si voglia triangolo esser minore di due retti. Poiche si è dimostrato l'angolo esteriore eguale à due interiori, & opposti insieme presi: e tutti tre insieme far la somma di due retti.

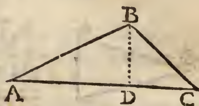
PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XII.

Il lato maggiore di qual si sia triangolo suttende l'angolo maggiore. *Euclid. 18. del 1.*

NEl triangolo ABC, sia il lato AC maggiore del lato AB. Dico che l'angolo B è maggiore dell' angolo C. Dal lato



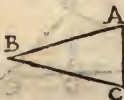
maggiore AC, *a* si seghi AD eguale al minore AB, e si cõgiunga la retta BD; il triangolo BAD sarà Isoscele, e perciò *b* gli angoli sopra la base ABD, & ADB saranno eguali trà loro; è l'angolo ABC maggiore dell' angolo ABD, cioè il tutto maggiore della sua parte. Adunque l'angolo ABC sara ancora maggiore dell' angolo ADB, e mà l'angolo ADB nel triangolo BDC è esteriore, e perciò maggiore dell' angolo C interiore, & opposto. Onde molto più l'angolo ABC sarà maggiore dell'angolo C. Si che il lato maggiore AC suttende l'angolo maggiore ABC; il che dimostrar si douea.

a *Prop. 5.*
b *Prop. 6.*
c *Corol. prop. 18.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XIII.

Euclid.6. & 19. del 1. *Gli angoli eguali d'vn medesimo triangolo sono sottesi da lati eguali. Et all' angolo maggiore si sottende il maggior lato.*



NEl triangolo ABC sia prima l'angolo A eguale all'angolo C. Dico che il lato CB è eguale al lato AB. Poiche se ciò nō è vero, sia BC maggiore, ò minore di AB. Adūque per la passata l'angolo A sarà maggiore, ò minore di C, il che è cōtro il supposto. E perciò CB non è maggiore, ò minore di AB. Laonde è necessaria, che gli sia eguale, il che facea mestieri dimostrare nel primo luogo.

Sia nel secondo luogo l'angolo A maggiore di B. Dico il lato BC esser maggiore del lato AC. Poiche se questo non è vero, sarà BC ò eguale, ò minore di AC. Sia eguale se è possibile. *a* Adunque gli angoli B, & A saranno eguali trà loro; mà l'angolo A fù posto maggiore di B. Adunque saranno eguali, e diseguali: che è impossibile. E perciò BC non è eguale alli AC.

a Prop. 6. lib. 1.

Sia poi minore, se anche questo può essere. Adūque per la passata al minor lato BC, si oppone l'angolo minore A: il che di nuouo è contra il sup-

ſuppoſto, auuenga che l'angolo A ſi ſupponeua maggiore di B. Adunque il lato BC non è minore del lato AC. Mà ne anche eſſer eguale fù dimoſtrato. Adunque BC ſarà maggiore di AC. Onde &c.

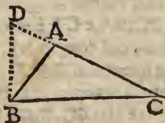
PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIV.

La ſomma di due lati di qualſiuoglia triangolo è maggiore del terzo, e la differenza de i medeſimi è minore del lato rimanente, e la ſomma di tutti tre i lati è maggiore del doppio d'vno, ma minore del doppio di due di eſſi. *Eucl. 20 del 1.*

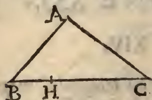
Sia qualſiuoglia triangolo ABC. Dico nel primo luogo, che la ſomma di qualſiuogliono due lati, come BA, & AC è maggiore del terzo lato BC. Allungato il lato CA verſo A, *a* ſi ſeghi DA eguale alla BA, e ſi congiunga la retta BD; perche nel triangolo BAD, i ſuoi due lati BA, e DA ſono eguali tra loro. Adūque *b* gli angoli alla baſe D, & ABD ſono trà loro eguali, & è l'angolo CBD maggiore dell'angolo partiale ABD. Adunque l'angolo CBD è maggiore dell'angolo D: e *c* perciò nel triangolo CBD, il lato CD, che ſot-

a *Prop. 3.*
b *Prop. 6*
c *prop. 2*



ſottende l'angolo maggiore, ſarà maggiore del lato BC: ma DC è eguale alla ſomma delle due rette linee BA, & AC (aggiungendoſi all'eguali BA, e DA communemente AC). Adunque la ſomma de i due lati BA, & AC è maggiore del terzo lato BC.

d *Prop.3.*



Nel ſecondo luogo ſi feghi dal maggior lato BC *d* la CH eguale all'AC, verrà ad eſſere BH la differenza de i due lati BC, e CA. Dico che la BH è minore della BA. Perche la ſomma de i due lati BA, & CA è maggiore di BC; ſe ſi ſottrarranno da loro l'eguali HC, e CA, *e* la BA auanzo della maggior ſomma ſarà maggiore di BH.

e *Aſſ.4.*

Dico nel terzo luogo, che la ſomma de i tre lati BA, AC, e CB è maggiore del doppio di BC. Perche i due lati BA, & AC ſono maggiori del lato BC, *f* aggiuntaui communemente la BC. La ſomma de i tre lati BA, AC, e CB ſarà maggiore del lato BC preſo due volte.

f *Aſſ.4.*

Nell'vltimo luogo, dico che la ſomma de i tre lati BC, BA, e CA è minore del doppio della BA, inſieme col doppio di CA. Perche BC è minore della ſomma di BA, & AC, aggiunta communemente la ſomma delle BA, & AC ſarà la ſomma de gi tre lati BC, BA, e CA minore della ſomma BA, & AC preſa due volte. Le quali coſe douean tutte dimoſtrarſi.

g *Aſſ.4.*

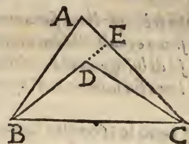
PRO-

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XV.

Se dall'estremità d'vn lato d'vn triangolo concorreranno dentro di esso due rette linee; la loro somma sarà minore della somma de gl'altri due lati del triangolo, mà conterranno vn'angolo maggiore. Eucl. 21. del 1.

Sia il triangolo ABC, e da'punti B,E concorrano dētro il triangolo le due rette linee BD, e CD in D; Dico la somma delle BD, e CD essere minore della somma delle BA, e CA, ma l'angolo BDC esser



maggiore dell'angolo BAC. La BD allungata seghi la AC in E, nel triangolo BAE *a* sara la sōma delle BA, & AE maggiore di BE, & aggiunta communemēte EC *b* sara la somma delle BA, & AEC maggiore della somma delle due BE, & EC. In oltre *c* nel triangolo CED la somma delle EC, & ED è maggiore di CD, & aggiunta cōmunemente DB *d* la somma delle CE, & EDB sarà maggiore della somma delle due CD, e DB. Laonde la somma delle AB, & AC sarà molto maggiorè della somma delle DB, e DC.

a *prop.19.*
b *Ass.4.*
c *prop.21*
d *Ass.4.*

Di poi *e* nel triangolo EDC, l'angolo esterio- e *Corol. pr.18.*

re

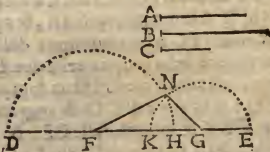
re BDC è maggiore dell'interiore, & opposto CED. Mà questo nel triangolo EAB è esteriore, f Corol. prop. 18. f e perciò maggiore dell'angolo interiore, & opposto A. Si che l'angolo BDC sarà molto maggiore dell'angolo A. Il che haueuasi à dimostrare.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA VIII.

Eucl. 22. del 1. *Date trè rette linee formare vn triangolo, i di cui lati siano eguali alle date rette linee ad vna ad vna. Mà fà di bisogno, che ciascheduna di queste date rette linee sia minore dell' aggregato delle rimanenti.*

SIano le trè rette linee A, B, e C, qualunque delle quali sia minore della somma della rimanente. Si deue formare vn triangolo, che habbia trè lati, ciascun de' quali sia eguale à ciascheduna delle date rette linee. Si tiri qualsiuoglia retta linea DE prodotta indefinitamente, & in lei



lei si seghi *a* la DF eguale ad A, e dalla parte, che rimane si seghi FG eguale alla B, e finalmente si seghi GE eguale alla C. Di poi fatto centro G coll'interuallo GE, si descriua il cerchio ENK, e centro F coll'interuallo FD, si descriua il cerchio DNH; e perche le rette DF, FG, e GE sono eguali alle rette A B, e C ad vna ad vna, e di queste le due A, e C insieme prese sono maggiori di B, per il dato, & è FH eguale ad A (p esser ambedue eguali alla stessa DF, ia A, per la costruttione, e FH per esser anch'egli raggio dell'istesso cerchio). Similmente è GK eguale a C, per essere ciascheduna di loro eguale alla stessa GE, e la FG eguale à B. Adunque le due FH, e GK sono maggiori della FG. Stante questo, dico che i cerchi DNH, & ENK si segano tra di loro, perche in altra maniera si toccarebbono, o caderebbe l'vno fuori dell'altro: Laonde la somma de i due loro raggi FH, e GK posti in diritto sarebbe minore, ò eguale alla retta FG, la quale congiunge i centri de' cerchi, il che è falso, essendosi dimostrata la somma delle due FH, e GK maggiore della sola FG, è dunque necessario, che tali cerchi si seghino, sia il concorso delle loro circonferenze in N, e si tirino le rette FN, e GN. E *f* perche FN è eguale alla DF, essendo tirate dal centro alla circonferenza del cerchio DNH, & alla retta A si fece eguale la medesima DF. g Adũque la FN è eguale ad A. Similmente GN, e GE sono raggi del medesimo cerchio, e *h* perciò eguali, & è la retta C eguale alla medesima GE. Adunque

a *Prop.* 3.

f *Ass.* 12.

g *Ass.* 1.

h *Ass.* 12.

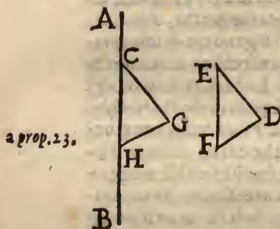
D que

que NG è eguale alla C; e si è fatta la retta FG eguale alla B. Adunque i tre lati del triangolo FNG sono eguali alle tre date rette linee A, B, e C. Il che si propose.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA IX.

Euclid. 23. del 1. *Nella data retta linea, e nel punto dato in essa, costituisce vn'angolo eguale à vn'altro angolo dato.*



a prop. 23.

Sia la data retta linea AB, si deue nel suo punto C costituire vn'angolo eguale à vn'altr'angolo dato E. Si tiri douunque si voglia la retta DF, purche faccia il triangolo DEF; di poi si faccia *a* il triãgolo CGH, i lati del quale siano eguali à i trè lati del triangolo DEF ad vno ad vno; di modo che al punto C conuengano i due lati CG eguale à DE, e CH eguale a EF. (Non hà dubbio ciò essere possibile, per esser due lati, quali si vogliano del triangolo EDF maggiori del rimanente.) Ora in questi due triangoli tutti i lati del-

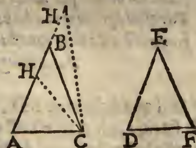
dell'vno sono eguali à tutti i lati dell'altro ad vno ad vno. Adunque *b* l'angolo C è eguale all'angolo E, i quali sono opposti à i lati GH, e DF eguali; e ciò bisognaua fare. b *prop.* 7.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XVI.

Se in due triangoli i due angoli dell'vno saranno eguali à i due angoli dell'altro ad vno ad vno, & vn lato eguale à vn lato, i quali siano adiacenti à gli angoli eguali, ouero siano sottesi ad angoli eguali; saranno i triangoli similmente eguali. *Eucl.* 26. *del* 1.

NE' triangoli ABC, e DEF sieno i lati AC, e DF eguali trà loro, e siano gl'angoli BAC, e D eguali, e siano similmente eguali tra loro gli angoli ACB, & F. *a* Manifesta cosa è, che il terzo angolo d'vn triangolo è eguale all'angolo rimanente dell'altro triangolo (per essere i tre angoli di ciascheduno di detti triangoli eguali à due retti. Dico che i lati AB, e DE sono eguali, e che parimente sono eguali tra loro i lati CB, & FE. Imperò che, se ciò non è vero, sia AB maggiore, ò minore di DE, e *b* si seghi la AH eguale à DE, e si congiunga la retta CH. E per- a *Dalla prop* 18. b *Prop.* 3.



che intorno à gli angoli eguali A, e D, i lati CA, & FD sono eguali, si come sono eguali i lati HA,
c *Prop.*4. & ED. Adunque ne' triangoli c ACH, & DFE, gli angoli ACH, & F saranno eguali tra loro. Ma l'angolo ACB era eguale al medesimo ango-
d *Ass.*1. lo F. Adunque d i due angoli ACH, & ACB sono eguali trà loro. La parte, ed il tutto che è e im-
e *Ass.*7. possibile. Laonde la retta linea BA non è maggiore, ne minore della ED, mà sarà eguale, per la medesima ragione i lati CB, & EF saranno eguali: il che bisognaua dimostrare.

PROPOSIZIONE XXVI.

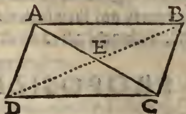
TEOREMA XVII.

Eucl. 34. *del* 1. *Il quadrilatero, i di cui lati opposti son paralleli, hà gli angoli, & i lati opposti eguali trà loro, & il diametro lo sega per mezzo, mà i diametri si segono vicendeuolmente per mezzo. Si chiami tale figura Parallelagrammo: e la perpendicolare tirata dalla sommità alla base opposta, si chiami altezza del Parallelagrammo.*

Sia il quadrilatero BD, il cui diametro AC, e siano i lati AB, e DC paralleli trà loro, siano paralleli similmente AD, BC. Dico nel primo luogo i lati AB, e DC essere eguali trà loro, come anche AD, e BC. Nel secondo luogo gli angoli B, e D, come anche gli angoli BAD, BCD essere trà loro eguali. Terzo, i triãgoli ABC, & ADC

segati

ſegatì dal diametro eſſere eguali. Quarto, i diametri AC, e BD ſegarſi ſcambieuolmente per mezzo in E. Perche nel quadrilatero AC, i lati oppoſti AB, e DE ſono paralleli, e ſon ſegati dall' AC. Adunque *a* gli angoli alterni BAC, e DCA ſono eguali trà loro. Similmente perche le rette *b* AD, BC ſono paralle le, e ſon ſegate dalla retta AC. Adunque gli angoli alterni BCA, e DAC ſono trà loro eguali. Onde nel triangolo BAC, i due angoli ſopra la baſe AC ſono eguali ad vno ad vno à i due angoli del triangolo DAC adiacenti ſopra la medeſima baſe; e *c* perciò i triangoli BAC, e DAC ſaranno ſimilmente eguali: sì che l'iſteſſo quadrilatero BD ſarà ſegato per mezzo dal diametro AC. Di più i lati AB, e DC, i quali ſottendono gl'angoli alterni eguali trà loro, come anche i lati oppoſti AD, e BC ſaranno eguali. In oltre ſaranno eguali gli angoli oppoſti B, e D, perche ſono ſotteſi dalla medeſima baſe AC; di vantaggio, perche à gli angoli eguali DAC, e BCA ſi aggiungono gli eguali angoli BAC, e DCA. Adũque *d* anche gli angoli oppoſti DAB, e BCD ſaranno eguali trà loro. Finalmente perche ne' triãgoli ABE, e CDE, i due angoli BAE, e DCE ſi ſono dimoſtrati eguali, e gli angoli AEB, e CED alla cima *e* ſono eguali, & i due lati AB, e CD,



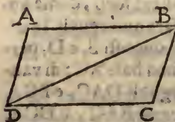
a *prop.* 15
b *prop.* 15
c *prop.* 25
d *Aſſ.* 2.
e *Corol. prop.* 5.

che sottendono angoli eguali, si sono dimostrati
f *Prop.* 25 eguali. Adunque *f* la AE è eguale ad EC, come è ancora eguale BE ad ED. Onde è manifesto quãto si propose. Chiamisi hora lo spatio ADCB Parallelogrammo, e la retta tirata perpendicolarmente dal lato supremo AB alla base opposta DC, si chiami altezza del Parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XVIII.

Se in vn quadrilatero gli angoli opposti trà loro, ouero
Euclid. *gl' opposti lati saranno eguali, ò saranno i due lati*
33. del 1. *opposti solamente paralleli, ed eguali, ò pure i due lati opposti i paralleli, e due angoli opposti eguali, ò i due lati opposti paralleli, e i due triangoli fatti dal diametro eguali, ouero i due diametri si segheranno per mezzo: sarà sempre Parallelagrammo.*

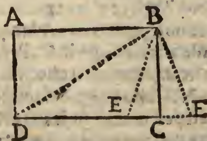


SIano primamente nel quadrilatero AC gli angoli ABC, e CDA eguali trà loro, come anche siano eguali gli angoli A, e C. Dico lo spatio AC essere Parallelagrammo. Perche se ad A, & à C eguali si aggiungono gli angoli
a *Ass.* 2. eguali ADC ad A, & ABC a C; *a* gli angoli A, & ADC insieme saranno eguali a due C, e CBA:
b *Dalla prop.* 18. ma *b* i quattro angoli di qualsiuoglia quadrilate-

ro sono eguali à quattro retti, per essere eguali à tutti gli angoli di due triangoli, ne' quali il quadrilatero si può diuidere; Adunque i due angoli A, & ADC insieme sono eguali a due retti, e sono interiori verso le medesime parti. Adunque le *c* AB, e DC son parallele. Nel medesimo modo AD, e BC saranno Parallele; e perciò lo spatio AC sara Parallelagrammo. c *Prop.16*

Sieno secondariamente i due lati opposti AB, e DC eguali trà loro, e parimente DA, e BC sieno eguali. Dico lo spatio essere Parallelagrammo. Tirato il diametro BD ne i triangoli ABD, e CBD saranno due lati dell'vno eguali a due lati dell'altro ad vno ad vno, e DB lato commune; Adunque *d* saranno similmente eguali, e perciò gli angoli opposti A, e C saranno eguali, & AD B, CBD saranno tra loro, come anche saranno eguali tra loro gli angoli ABD, e CDB. Onde *e* i due angoli ADB, e CDB insieme saranno eguali à i CBD, & ABD insieme presi: Adunque per la prima parte di questa proposizione lo stesso spatio AC sara Parallelagrammo. d *Prop.7* e *Ass.2.*

Nel terzo luogo solamente i lati opposti AB, e CD siano paralleli, & eguali: ne seguirà il medesimo. Imperciòche, se ciò non è vero, tirata *f* la BE parallela alla A D, si faccia il paralle- f *Corol. prop.16.*



g Prop.26 lagrammo ADEB. Non à dubbio, che la retta BE caderà ò di quà, ò di là dal punto C. g Adunque il lato DE sarà eguale al lato opposto AB, ouero al DC; la parte al tutto, che è inconueniente. Adunque la BE parallela alla AD, non cade altroue, che nel punto C; onde lo spatio AC è parallelagrammo.

Sieno nel quarto luogo AB, e DC parallele, e gli angoli ADC, & ABC siano eguali, ne seguirà

h Corol. prop.16. il medesimo, se ciò non è vero, h tirata BE parallela alla AD non cadente in E, si faccia il pa-

i Prop.26 rallelagrammo AE. Adunque i l'angolo ABE sarà eguale all'angolo opposto D, ouero ad ABC, che era eguale a quello, la parte, e'l tutto, che non può esser. Adunque BE parallela alla DA nõ cade altroue, che in C. Onde è manifesto quel che si propose.

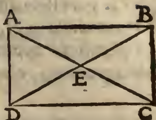
Nel quinto luogo AB, e DC sieno parallele, e i triangoli ADB, e CDB eguali; ne seguirà la me-

k Corol. prop.16. desima cosa: se ciò non è vero, k tirata la BE parallela alla DA, che non cada in C, si faccia il

l Prop.26. parallelagrammo EA. l Adunque il triangolo EDB sarà eguale al triãgolo BAD, ouero il triangolo BDC, ch'era eguale a lui, la parte al tutto, che non può essere. Adunque la parallela BE nõ cade altroue, che in C. Per la qual cosa AC è parallelagrammo, il che bisognaua dimostrare.

Nel sesto luogo i diametri AC, e BD siano segati per mezzo in E, sarà lo spatio AC ancora Parallelagrammo. Imperciochè i due triangoli AEB, CED anno intorno à gli angoli alla cima

E *m* i lati eguali AE ad EC, e BE ad ED. *n* Adunque gli angoli ABE, e CDE alterni saranno eguali tra loro, e per ciò *o* AB, DC saranno tra loro parallele: nel medesimo modo AD, e BC saranno parallele, e per questo sarà lo spatio ABCD Parallelagrammo. Le quali cose tutte conueniua dimostrare.



m *Cor prop. 5.*
n *Prop. 4.*
o *prop. 26*

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA X.

Diuidere vna data retta linea in quante si voglia parti eguali.

Eucl. 9. del 6.

SIa la data retta linea AC, si deue diuidere in vna data moltitudine de parti eguali. Si tiri dal punto A la retta AB, che faccia in A qualsiuoglia angolo CAB, & in AB si tagli qualsiuoglia pezzo AD, e successiuamente *a* si facciano le parti DE, EF, FB ciascheduna eguale alla stessa AD; le quali siano tante, quante parti eguali deuono essere contenute in AC, e si congiunga la retta BC; e da i punti D, E, F dentro il triangolo ABC si tirino *b* le rette DG, EH, FM parallele alla base BC, le quali seghino la retta AC in G, H, M. Dico la retta AC essere diuisa nelle parti eguali imposte. Da punti D, E, F si tirino *c* le rette DN, EO,

a *Prop. 3.*
b *Corol. prop. 16.*
c *Corol. prop. 16.*

EO, FK parallele alla ſteſſa AC, diuidenti le vicinle parallele in N, O, K; e *d* perche à cagione
d *prop.26* dele parallele oppoſte lo ſpatio GDNH è pa-
e *Prop.26* rallelagrammo, *e* ſarà DN eguale alla GH: ed



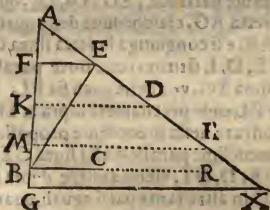
eſſendo ne' triangoli DNE, & AGD l'angolo
f *prop. 15.* eſteriore *f* NDE eguale all'angolo A interiore,
g *prop.15.* & oppoſto nelle parallele DN, AC, *g* e l'angolo NED interiore, per le parallele HE, GD, eſſendo eguale all'angolo eſteriore, & oppoſto GDA, & eſſendoſi i due lati adiacēti DE, AD fatti egua-
h *prop.25* li. *h* Adunque i lati DN, & AG ſono eguali trà loro, ma era GH eguale alla medeſima DN.
i *Aſſ.1.* Adunque GH *i* è eguale alla AG, per la medeſima ragione HM, & MC dimoſtrerannoſi eguali alla medeſima AG. Laonde AC ſi ſarà diuiſa in tante parti eguali AG, GH, HM, MC quante ſono le parti comandate contenute nella retta AB. E queſto era ciò che douea farſi.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XIX.

Se due angoli interiori verso le medesime parti di vna retta linea segante due altre rette, saranno minori di due angoli retti; quelle rette linee allungate chiuderanno vn triangolo. Euclid. 29. del 6.



SIano i due angoli DAB, e CBA minori di due retti. Dico le linee AD, e BC cõcorrere ver-so le parti D, C, e formare vn triãgolo. Da qual-sivoglia punto E, posto sotto il punto A, si con-giunga la retta EB, e si faccia *a* l'angolo BEF e-guale all'angolo EBC. E perche i due angoli A, & ABC, cioè i trè angoli A, ABE, & EBC sono minori di due retti. Adunque *b* son minori de' due an- a prop. 24 b prop. 12

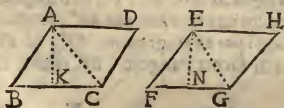
angoli BED, e BEA, i quali sono eguali à due ret-
c prop. 18 ti. Et è c l'angolo DEB eguale a i due angoli A,
& ABE interiori, & opposti nel triangolo ABE.
Adunque d l'altro angolo AEB sarà maggiore
d Ass. 4. dell'angolo EBC; e perciò l'angolo BEF (che
era eguale all'angolo EBC) sarà minore dell'an-
golo AEB, sì che la retta linea EF segarà la retta
e Prop. 13. linea AB, frà i punti A, e B. Si seghino in oltre e
le rette FK, KM, & MG ciascheduna eguale alla
stessa AF, finche si faccia tutta la AG maggiore
di AB; Di poi nella retta AE allungata, si ta-
glino tante parti AE, ED, DI, IX, quante sono
nella retta AG, ciascheduna delle quali sia egua-
le ad AE, e si congiunga la retta linea GX, e da' f
f Corol. punti E, D, I, si tirino rette linee parallele alla
della pr. medesima XG, vna delle quali sia EL. Dico ora
16. che la EL cade precisamēte sopra la EF. Perche
si è mostrato nella precedente proposizione, che
dalle medesime parallele alla linea GX, tirate da
i punti E, D, & I, vien ad essere diuisa la retta li-
nea AG in altre tante parti eguali, quante prima
se n'eran fatte nella AX: vna delle quali sarà la
AL: e però la AL tante volte misurarà la AG,
quante la AE misura la AX, ma la AF misura la
AG tāte volte, quante la AE misura la AX. Adū-
que le AL, & AF misureranno egualmente la
g Ass. 5. stessa AG: per la qual cosa g le AL, & AF sono
eguali trà loro. E però il punto L cade sopra F;
e la retta EL cade sopra la EF; ma era la EL pa-
rallela alla XG. Adunque la retta linea EF sarà
parallela ad XG: e tirandosi dal pūto B nel trian-
golo

golo GAX la retta BC dentro lo ſteſſo triangolo, parallela alla baſe GX; Adunque la BC prodotta ſegarà l'altro lato AEX nel punto R. Il che biſognaua dimoſtrare.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XX.

Se in due parallelagrammi, che abbino vn' angolo eguale à vn' angolo, ſaranno le baſe trà loro eguali, e anche le altezze eguali; ſaranno eziandio eguali trà loro i parallelagrammi.



SIeno i due parallelagrammi BD, & FH, ne' quali gl'angoli B, & F eguali, e le baſe BC, FG, e le perpendicolari, ouero le altezze AK, EN eguali. Dico i parallelagrammi BD, FH eſſere eguali: ſi tirino i diametri AC, EG Perche ne' triangoli ABK, & EFN, gli angoli B, & F ſono eguali, e i due angoli K, & N ſono retti, & i lati AK, EN eguali, quegli che ſono oppoſti ad angoli eguali. *a* Adunque le BA, FE ſono eguali. a *prop.* 25

E per-

E perche intorno à gli angoli eguali B, F, i lati AB, EF sono eguali, e parimente sono eguali i lati BC, FG. *b* Adunque i triangoli ABC, EFG sono eguali, e *c* i loro doppi, cioè i parallelagrammi BD, FH saranno eziandio eguali. Il che &c.

b *Prop.* 4.
c *prop.* 26

PROPOSIZIONE XXXI.

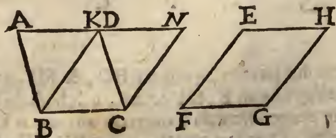
TEOREMA XXI.

Eucl. 35. 36. *del* 1.

Se due parallelagrammi non equiangoli aueranno le base, e le altezze eguali saranno eguali.

NE' parallelogrammi AC, & EG non equiangoli, le base BC, FG siano eguali, e siano eziandio eguali l'altezze de' parallelogrammi. Dico i parallelogrammi AC, & EG essere eguali. *a* Si faccia l'angolo CBK eguale all'ango-

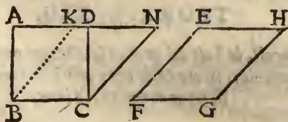
a *prop.* 24



lo F, e *b* si tiri CN parallela à BK, e la AD prolungata seghi le parallele *c* BK, CN in K, & N, e *d* si sarà fatto il parallelogrammo BCNK, essendo ancora AN parallela alla BC. Perche ne' triangoli ABK, e DCN *e* l'angolo CDN esteriore

b *Corol. prop.* 16.
c *prop* 29
d *prop.* 26
e *prop.* 15.

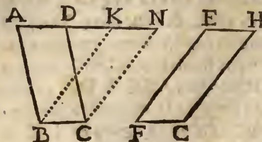
riore è eguale all'angolo BAK interiore, & opposto nelle parallele AB,CD. E parimente perche *f* l'angolo interiore CND è eguale a BKA *f prop.15.*
nelle parallele CN, BK, & i due lati *g* BA, CD *g prop.26*
sottendenti, gli angoli eguali sono eguali tra loro, essendo lati opposti del parallelogrammo
AC. Adunque *h* i triangoli ABK, & DCN sono *h prop.25*
eguali trà loro. Et *i* aggiunta communemente *i Ass.2.*
(nel primo, e secondo caso) la figura BCDK, il parallelogrammo AC sarà eguale al parallelogrammo BN, ma (nel terzo caso) *k* leuato via *k Ass.3.*
communemente il triangolo DOK, i quadrilateri ABOD, & NKOC saranno eguali tra loro,
& *l* aggiunto communemente il triangolo BOC, *l Ass.2.*



similmente il parallelogrãmo ABCD sarà eguale al parallelogrammo BCNK. E perche i parallelogrammi BN, & AC sono trà le medesime parallele AN, e BC, *m* saranno egualmente *m Prop 26.*
alti, per essere eguali tutte le perpẽdicolari, ouero distanze delle parallele AN, e BC. Ma furono posti i parallelogrammi FH, & AC egualmente

alti.

alti. Adunque i parallelogrammi BN, & FH sono egualmente alti, & anno le base BC, FG eguali trà loro, & eguali ancora trà loro gli angoli KBC, & F. *n* Adunque il parallelogrammo FH è eguale al parallelogrammo BN; mà si dimostrò il parallelogrammo AC eguale al medesimo parallelogrammo BN. Adunque *o* i parallelogrammi AC, & FH sono eguali trà loro.



n *Prop.* 30.

o *Ass.* 1.

PROPOSIZIONE XXXII.
TEOREMA XXII.

Euclid. 37. e 38. *del* 1.

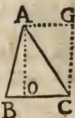
I triangoli, le base de' quali, e le altezze, ouero le perpendicolari tirate dalle cime alle base sono eguali, saranno eguali trà loro.

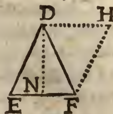
ABbiano i triangoli ABC, e DEF, le base BC, & EF eguali trà loro, e le perpendicolari, ouero le altezze AO, DN tirate da punti A, D alle base BC, & EF siano eguali. Dico i triangoli ABC, DEF essere trà loro eguali. Tirata *a* AG parallela alla BC, e CG fatta parallela alla BA, si faccia il parallelogrammo ABCG; nel medesimo modo si perfezioni il parallelogrammo EDHF. Perche i parallelogrammi BG, & EH

a *Corol. prop.* 16.

anno

anno le base BC, EF eguali, e l'altezze eguali (essendo le eguali perpendicolari AO, & EN altezze de' parallelogrammi BG, & EH) adunque *b* i parallelogrammi BG, & EH sono eguali trà loro, & *c* è il parallelogrãmo EH doppio del triangolo DEF. Adũque *d* il parallelogrammo BG eguale à quello, sara parimente doppio del medesimo triangolo DEF. Mà *e* il medesimo parallelogrammo BG è doppio del triangolo ABC. Adunque *f* i triangoli ABC, e DEF saranno eguali trà loro. Il che bisognaua &c.



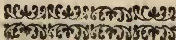


b *prop.* 31
c *prop.* 26
d *Ass.* 5.
e *Prop.* 26
f *Ass.* 5.

COROLLARIO I.

Manifesta cosa è, che se il parallelogrammo, & il triangolo auerano le base eguali, e l'altezze eguali, il parallelogrammo sarà doppio dello stesso triangolo. *Eucl.* 4. *del* 1.

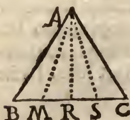
Auenga che il parallelogrãmo BG, & il triangolo DEF anno le base BC, & EF eguali, & eziãdio eguali l'altezze, e dimostrossi il parallelogrammo BG doppio del triangolo DEF.



COROLLARIO II.

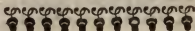
Chiara cosa è ancora, che se saranno due triangoli egualmente alti, e la base dell'vno sarà doppia, ò tripla &c. della base dell'altro: ancora il triangolo sara doppio, ò triplo &c. dell'altro triangolo.

Atteso che, se ne' triangoli ABC, DEF egualmẽte alti, la base DC sara esẽpigrazia quadrupla di EF, e da i punti delle eguali diuisioni M, R, & S, si congiungan alla cima A rette linee, il triã-golo ABC si sara spartito in tanti triangoli ABM, AMR, ARS, ASC, quãte sono le base eguali BM, MR, RS, SC; e sono i sopradetti triangoli egualmente alti sì trà di loro, come allo stesso DCF, imperciocheche la perpendicolare tirata da A sopra la base BC, è l'altezza cõmune, & eguale all'altezza del triangolo DEF. Adunque tutti i detti triangoli sono eguali tra loro, come anche allo stesso triangolo DEF. E perciò il triangolo ABC sarà quadruplo del triangolo DEF, conforme erano le base: e così nell'altre moltiplicazioni.





g prop. 32



PRO-

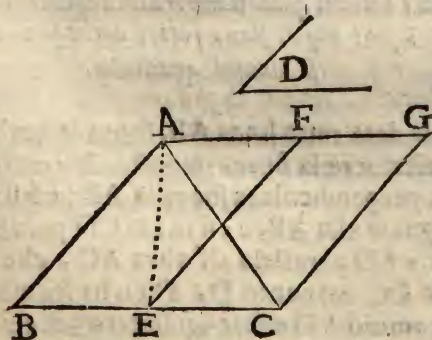
PROPOSIZIONE XXXIIII.

PROBLEMA XI.

Descriuere vn parallelogrammo eguale ad vn dato triangolo, che abbia vn' angolo eguale ad vn dato angolo. *Euclid. 42. del 1.*

SIa il dato triangolo ABC, e l'angolo D; si deue descriuere vn parallelogrammo eguale al triangolo, che abbia vn'angolo eguale all'angolo D. *a* Segata la BC per mezzo nel punto E, si tiri la AE, e *b* si faccia l'angolo CEF eguale all'angolo D, e si tiri *c* CG parallela alla EF, & AG

a *prop. 9.* b *prop. 24* c *Corol. prop. 16.*



parallela alla BC, che seghi le parallele ne' punti FG. E manifesto *d* lo spazio CF essere parallelogrammo, il quale auendo la medesima base

d *prop 26*

EC col triangolo ACE, ed essendo i sopradetti spazi fra le medesime parallele AG, & EC. Adunque *e* il parallelogrammo EG è il doppio del triangolo AEC. *f* Ma il triangolo ABC è il doppio del medesimo triangolo AEC, per esser la base BC doppia della base EC, & l'altezza commune. Adunque il parallelogrammo *g* EG è eguale al triangolo ABC, & hà vn' angolo CEF eguale all'angolo D. Per la qual cosa si è formato &c. il che bisognaua fare &c.

e *Corol.* 1 *prop.* 32.
f *Corol.* 2. *prop.* 32.
g *Ass.* 5.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA XII.

Euclid. 46. *del* 1.

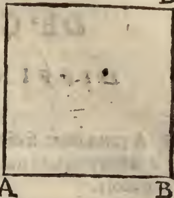
Descriuere sopra vna data retta linea vn quadrilatero, tutti i lati del quale siano trà loro eguali, e tutti i suoi angoli siano retti: cotal figura si chiami quadrato.

SIa la data retta linea AB, sopra la quale si dee descriuere la figura imposta. Si *a* inalzi da A la GA perpendicolare sopra la AB; e *b* si tagli la CA eguale alla AB, e *c* si tiri la CD parallela alla AB, e BD parallela all' altra AC, che incontri *d* la DC nel punto D. Dico lo spazio parallelogrammo AD essere equilatero, & equiangolo. Perche AD è parallelogrammo, adunque *e* il lato CD è eguale al lato opposto AB, ma per la costruzione al medesimo AB è eguale ancora AC. Adunque *f* CD è eguale alla CA; Mà di nuouo

a *prop.* 10.
b *prop.* 3.
c *Corol.* *prop.* 16.
d *Dalla prop* 29.
e *prop.* 26
f *Ass.* 1.

uo

uo g al medesimo CA è eguale il lato oppostogli BD. Adunque BD è eguale alla CD. Ed è eguale al medesimo *h* CD il lato opposto AB. Adũque BD, & AD sono eguali trà loro. Sì che è manifesto tutti i quattro lati del parallelogrammo AD essere eguali trà loro. Poi perche nelle parallele AC, e BD segate dalla AB *i* due angoli intereriori A, e B sono eguali à due retti; & è l'angolo A, per la costruzione, retto. Adunque l'angolo B è retto ancor'egli. Ed essendo gli angoli *k* C, e D eguali à suoi opposti. Adũque gli angoli C, e D saranno ancor essi retti; e perciò saranno retti tutti quattro gli angoli della figura AD. Adunque sopra la data retta linea AB abbiamo descritto la figura AD, la quale dimostrato auiamo essere equilatera, & equiangola. Come si ricercaua. Ora ella si chiami Quadrato.



g *prop.26*

h *prop.26*

i *prop. 15.*

k *prop.26*

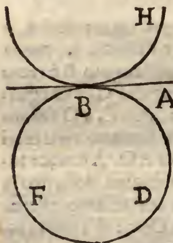
Fine del Libro primo.

LIBRO SECONDO
DE' CERCHI.

DIFFINIZIONI.

I.

LA retta linea si dice toccare il cerchio, quando arriuando nel cerchio non lo sega, ma cade fuori.

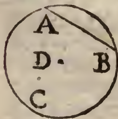


I I.

Vn cerchio si dice toccar l'altro cerchio, quando la circonferenza dell'vno toccando l'altra, non sega il cerchio.

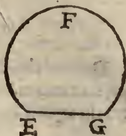
Se cadendo alcuna retta AB in vn cerchio, e prodotta non lo sega, ma cade fuori del cerchio, si chiamerà Tangente; e se la circonferenza BH caderà nel cerchio BD, e non lo segherà, sarà chiamata parimente Tangente. Ma se prodotta segherà il cerchio, sarà detta Secante.

I I I.



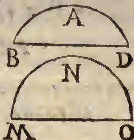
Allora si dice, che vna retta linea sia applicata, ouero adattata al cerchio, quãdo i suoi termini saranno alla circonferenza del cerchio.

Esempigrazia la retta linea AB sarà adattata, ouero applicata al cerchio ABC, quando i termini A, & B della stessa retta linea, saranno nella stessa circonferenza del cerchio AB.



I V.

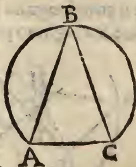
La Porzione del cerchio è vna figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza.



Così lo spazio BAD, come MNO, ouero EFG sarà porzione di cerchio. Ma queste porzioni anno nomi diuersi. Poiche se il cerntro del cerchio sarà dentro la sua superficie, sarà chiamata porzione maggiore, come è EFG, ma se sarà fuori di esso, come in BAD, si chiamerà porzione minore. E finalmente se il centro sarà nella stessa retta linea Secante, come in MO, cotal porzione sarà detta Semicerchio.

V.

Angolo nella porzione si dice esser quello, che vien compreso da due rette linee concorrenti in qualsiuoglia punto della circonferenza, e terminate nell'estremità della retta linea, che è base della porzione.



In quella guisa, che nella porzione ABC, le due rette linee AB, e CB concorrenti in qualsiuoglia suo punto B, eleuate da termini A, C, fanno l'angolo ABC compreso nella detta porzione.

ASSIOMA.

Due cerchi, che abbiano i raggi eguali trà loro, saranno tra loro eguali. E per il contrario i cerchi eguali auranno eguali i raggi.

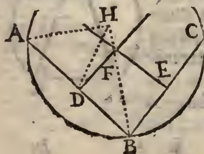
PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

Eucl. 1. e 2. del lib. 3. *Data vna circonferenza del cerchio, ritrouare il centro del cerchio, di cui ell' è circonferenza.*

Sia la data circonferenza ABC, ò intera, ò nò. Deue ritrouarsi il centro di quel cerchio, di cui ABC è circonferenza. Si prendano nella detta circonferenza tre qualunque punti A, B, & C, e si congiungano le rette AB, e BC. Di poi amendue si *a* seghino per mezzo ne' punti D, & E, da

a prop. 9. del lib. 1.
b prop. 10 del lib. 1.



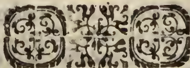
quali si *b* eleuino le perpendicolari DF sopra AB, & EF sopra BC. Perche le rette linee AB, CB non sono in diritto, per la curuità del cerchio. Adunque la con-

congiunta retta linea DE diuiderà gl'angoli ret-FDB,& FEB, e perciò i due angoli FDE,& FED saranno minori di due retti; *c* onde le rette linee DF, & EF concorreranno, come nel punto F. Dico ora il punto F del concorso delle perpendicolari essere il cētro di quel cerchio, di cui ABC è circonferenza. Se questo non è vero, sia centro del cerchio ABC il pū[n]to H diuerso da F, del cōcorso delle rette linee DF, EF: e per ciò il punto H caderà se non fuori di amendue, almeno fuori di vna delle perpēdicolari DF. Si congiungano le rette AH, BH, DH. Perche ne' due triangoli AHD, DHB i lati AD, BD sono eguali, e DH commune, e le base AH, BH eguali, essendo raggi del cerchio. Adūque gl'angoli *d* ADH, BDH sono eguali, e *e* perciò retti; ma era l'angolo ADF retto. Adunque gl' angoli ADF, & ADH sono eguali trà loro; la parte, e'l tutto, che è impossibile. E però il punto H diuerso dal punto F non può esser centro del cerchio ABC. Per la qual cosa lo stesso punto F sarà il centro. Il che douea farsi.

c *prop.* 29 *del lib.* 1.

d *prop.* 7. *del lib.* 1.

e *prop.* 10 *del lib.* 1.

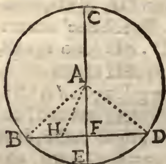


PRO-

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA I.

Euclid. 3. del lib. 3. *Se vna delle rette linee applicate nel cerchio, distesa per il centro, sega per mezzo vn' altra retta non tirata per il centro, la segherà ad angoli retti. E se la sega ad angoli retti, la segherà ancora in mezzo.*



LA retta linea CE applicata per il centro A del cerchio DBC diuida la retta BD nõ distesa per il centro in parti eguali nel punto F. Dico la retta CF essere perpendicolare sopra la BD. Tirati i raggi BA, & AD, ne'triangoli AFD, & AFB i due lati BF, & FD sono eguali in virtù del supposto, & FA commune, e le base AB, & AD eguali, essendo raggi del cerchio.

a prop. 7. del 1. *a* Adunque gli angoli AFB, & AFD saranno eguali, e *b* perciò retti. Il che bisognaua nel primo luogo dimostrare.

b prop. 10 del 1.

Nel secondo luogo la AF tirata per il centro sia perpendicolare alla DB. Dico la BD esser segata per mezo in F. Impercioche se questo non è vero, *c* si diuiderà in mezo la BD in diuerso sito, che in F, e sia H, e si congiungano le rette linee AH, AB, AD. E perche la AH distesa per il centro

c prop. 9. del 1.

tro

tro ſega per mezo la retta BD in H. Adunque (per la prima parte) l'angolo AHB è retto; ma era retto l'angolo AFB. Adunque nel triangolo AHF, l'angolo eſteriore AHB è eguale all'angolo F interiore, & oppoſto, *d* che è inconueniente. Non in altro ſito adunque che in F può eſser ſegata per mezo la retta BD. Per lo che è manifeſto quel che ſi propoſe.

d *Corol. della propoſ. 18. del 1.*

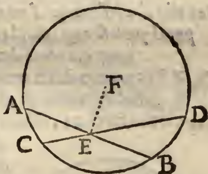
PROPOSIZIONE III.

TEOREMA II.

Se due rette linee applicate nel cerchio, non tirate per il centro ſi ſegheranno, elle non ſi ſegheranno in parti eguali ſcambieuolmente.

Eucl. 4. del lib. 3.

NEl cerchio ABD due rette linee AB, & CD ſi ſeghino ſcambieuolmēte in E, ma vna delle applicate, ò ambedue non paſſino per il centro F. Dico non poterſi ſcambieuolmente ſegare per mezo. Poiche ſe vna di loro paſſa per il centro, non ſarà ſegata per mezo dall'altra, che non paſsa per il centro; auuegnache nel centro ſolamente il diametro ſi ſparte per mezo. Ma ſe ne l'vna, ne l'altra paſſa per il centro, ſi tiri dal centro F al con-



cor-

corso E la retta FE. Si dee dimostrare le rette AB, e CD nel punto E non segarsi scambieuolmente per mezo. Poiche, se questo non è vero, sieno amendue segate in parti eguali nel pũto E. E perche FE tirata per il centro sega AB per il mezo, adunque *a* la segherà ad angoli retti. Per la medesima ragione la retta CD sarà segata ad angoli retti dalla medesima FE. Laonde gl'angoli FEB, & FED saranno retti, e perciò eguali tra loro; la parte al tutto, che è impossibile. Non si segano adunque in parti eguali amẽdue le rette AB, & CD nel punto E. Per la qual cosa &c.

a Prop. 2. di questo lib.

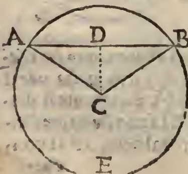
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA III.

Euclid. 2. del lib. 3.

Se nella circonferenza d'vn cerchio si piglieranno due punti quali si vogliano, la retta linea, che li congiugne, caderà dentro al cerchio.

NEl cerchio ABE congiunga la retta linea AB due punti, quali si vogliano presi nella sua circonferenza. Dico che la retta AB cade dẽtro al cerchio. Impercioche preso nella retta AB qualsiuoglia punto tramezo D, si congiungano dal cẽtro C le rette CA, CB, CD. Perche nel triangolo Isoscele CAB i due lati CA, &



CB

CB sono eguali. Adunque *a* gli angoli A, & B sopra la base AB saranno eguali trà loro. Ma nel triãgolo CBD, l'angolo esteriore *b* CDA è maggiore dell' interiore, & opposto B. Adunque il medesimo angolo CDA sarà maggiore dell'angolo CAD; e perciò *c* il lato AC opposto all'angolo maggiore sarà maggiore del lato DC. Per la qual cosa la retta CD sarà minore del raggio del cerchio CA, e perciò CD non arriua alla circonferenza del cerchio. Onde il punto D sarà dentro il cerchio. Per la medesima ragione qualsiuoglia altro pũto della retta AB caderà dentro il cerchio; e però la medesima retta linea sarà distesa dentro il cerchio. Il che bisognaua dimostrare.

a *prop. 6. del lib. 1.*
b *Corol. prop. 18. del lib. 1.*
c *prop. 20 del 1.*

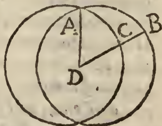
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA IV.

Se due cerchi si segano l'vno l'altro, ouero si toccano dalla parte di dentro, non aueranno vn medesimo centro.

Euclid 5. e 6. del lib. 3.

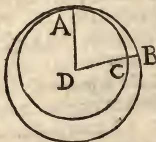
Sieno i due cerchi AB, & AC, i quali si seghino, ouero si tocchino dalla parte di dentro nel punto A. Dico che essi non anno vn medesimo centro. Poiche, se è possibile, sia D il centro



dell'

dell'vno, e dell'altro, dal quale si tiri al toccamento, ouero al segamento A la retta DA, e vn'altra DCB, che seghi l'vn, e l'altra circonferenza ne' punti C, & B. Perche D è centro del cerchio AB. Adunque *a* il raggio BD è eguale al raggio DA. Di più perche D si pone esser centro del cerchio AC, il raggio CD sarà eguale al medesimo raggio DA, e perciò le due rette BD, & CD saranno eguali trà loro; la parte, e'l tutto, che non può essere. Non possono adunque i due cerchi AB, & AC auere il centro D commune. Il che bisognaua dimostrare.

a Ass. 12. del lib. 1.



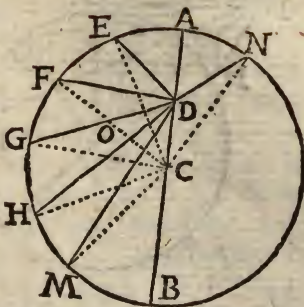
PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA V.

Euclid. 7. & 8. del lib. 1.

Delle rette linee cadenti nella circonferenza da vno punto, che non è centro del cerchio, la massima è quella, che passa per il centro, la minima è l'auanzo, ò produzione del diametro. Dell'altre poi, quella che sottende vn'angolo maggiore al cẽtro è maggiore della sottendente vn'angolo minore, e due rette linee solamente caderanno dal medesimo punto, e dall'vna, e dall'altra parte del diametro eguali trà loro.

Nel



NEl cerchio AGB, il cui centro ſia C, ſi prenda qualſiuoglia punto D diuerſo dal centro (ò dentro il cerchio, come nella prima figura, ò fuori, come nella ſeconda, ò nella ſua circonferenza, come nella terza) e dal punto D ſi tirino alla circonferenza del cerchio quante ſi vogliano linee rette DB, DM, DH, DG, DF, DE, DA, & DN, delle quali la DB paſſi per il centro. Dico la retta DB eſſere la maſſima di tutte. Si congiungano dal centro C à i punti M,H,G &c. i raggi CM,CH,CG &c. *a* Perche i due raggi CM, e CB ſono eguali, aggiunta communemente la CD, le due rette MC, e CD inſieme ſaranno eguali alla retta BD. Ma DM *b* è minore de i due lati CM, & CD inſieme nel triangolo MCD. Adunque MD è minore di BD. Per la medeſima ragione DH ſara minore di DB, e così l'altre tutte DG, DF &c. Laonde la retta BD, che paſsa per il centro è la maſſima di tutte. Il che douea moſtrarſi nel primo luogo.

a *Aſſ.* 12. *del lib.* 1.

b *prop.* 21 *del lib.* 1.

Nel ſecondo luogo dico la DA (che è l'auanzo del diametro nella prima figura, & il ſuo allungamento nella ſeconda) eſsere la minima di tutte le rette, che poſsono dal punto D eſser tirate nel cerchio. Perche nel triangolo DCE

la

la DA è la differenza de' due lati DC, & EC, auuegna che CE, e CA raggi del cerchio sono eguali trà loro. *c* Adunque la DA differenza de' lati sarà minore della base DE. Nel medesimo modo DA sarà minore di qualsiuoglia altra DF, ò DG, ò DN &c. Per la qual cosa DA è la minima di tutte le rette, che dal punto D si possono tirare nel cerchio. Che era la secōda parte da dimostrarsi.

c prop.21 del lib. 1.

Nel terzo luogo la retta DG sottenda l'angolo GCD al centro, maggiore dell' angolo FCD sotteso dalla retta FD. Dico la DG esser maggiore della DF: e se per auuentura la DG sega il raggio FC dentro il cerchio nel punto O; (come nel primo, e terzo caso). Perche *d* nel triangolo GOC i due lati GO, & OC son maggiori di GC, e parimente nel triangolo DOF i due lati DO, & OF insieme presi son maggiori di FD: per questo le quattro rette linee

d prop.21 del 1.

linee GO, OD, FO, & OC, cioè le due GD, & FC insieme prese saranno maggiori delle due FD, e GC; e da questi aggregati diseguali si leuino via i raggi eguali GC, & FC, rimarrà *e* la GD maggiore di FD. Ma se DG non sega il raggio FC (come nel secondo caso). Perche dentro il triangolo DGC concorrono le rette linee DF, & CF tirate da' termini della base D, C. Adunque *f* le due GC, & GD insieme prese son maggiori delle due CF, & FD; e da questi diseguali aggregati si tolgano via l'eguali CG, CF raggi del cerchio, *g* l'auanzo GD sarà maggiore dell' auanzo FD.

e *Ass.* 4. *del lib.* 1.

f *prop.* 22. *del lib.* 1.

g *Ass.* 4. *del lib.* 1.

Nel quarto luogo si faccia *h* l'angolo al centro DCN eguale all'angolo DCE, e si congiunga la DN. Perche ne' triangoli DCN, e DCE intorno à gl'angoli eguali al centro sono i lati NC, e CE eguali (per esser raggi del cerchio) e CD lato commune. Adunque le base *i* DN, e DE sono eguali, ma qualsiuoglia altra, che si tira di là dal punto E, come è DF, si è dimostrata maggiore di DE, auuenga che è opposta all'angolo maggiore DCF al centro. Adunque sara maggiore ancora della DN. Di più qualsiuoglia altra tirata di quà da DE verso il punto A, si è dimostrata minore della DE. Adunque sara ancora minore di DNE, però due rette solamente DN, e DE possono esser tirate eguali dall'vna, e dall'altra parte del diametro. Il che bisognaua dimostrare.

h *prop.* 24 *del lib.* 1.

i *prop.* 4. *del lib.* 1.

COROLLARIO I.

Euclid 9. del lib. 3. Se sarà preso vn punto dentro il cerchio, dal quale cadano alla circonferenza più di due rette linee eguali trà loro, il preso punto sarà centro del cerchio. Perche da qualsiuoglia punto, che non è centro, possono tirarsi solamente due rette linee eguali, e non più, come si caua dall' vltima parte della proposizione. Adunque il punto, dal quale più di due rette linee cadono eguali, è impossibile, che sia collocato fuori del centro; onde bisogna necessariamente, che sia il centro.

COROLLARIO II.

Eucl. 24. 25. del lib. 1. Si raccoglie dalla terza parte di questa proposizione, che se saranno due triangoli, che abbiano due lati eguali à due lati l'vno a l'altro, e l'angolo compreso maggiore dell' angolo compreso da detti lati, la base sarà maggiore della base. E per il cõtrario. Imperciòche ne'triangoli DCM, & DCH i lati MC, HC erano eguali, & il lato DC comune, e l'angolo DCM maggiore dell' angolo DCH, & è stata dimostrata la base DM maggiore della base DH. E per il contrario se DM fusse maggiore di DH, l'angolo MCD sarà maggiore dell' angolo DCH. Perche il punto M della retta linea DM è più rimoto del tèrmine A della circonferenza, che non è H termine della minor DH, e però l'angolo DCH sarà parte di tutto l'angolo DCM.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VI.

Vn cerchio in più che in due punti non può segar' vn' altro cerchio. *Eucl. 10. del lib. 3.*

SI seghino i due cerchi ABHR, ABCF in più che due punti A, B, & D, se è possibile: e *a* ritrouato il cētro O del cerchio ABH, da quello si tirino i raggi AO, *a prop. 1. di questo.*



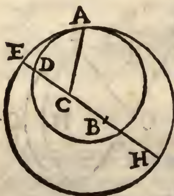
OB, & OD à i tré punti de i segamenti de' cerchi, i quali raggi saranno eguali trà loro. E perche dentro l'altro cerchio ABCF è stato preso il pūto O, e da lui cadono nella circonferenza del cerchio più di due rette linee eguali AO, OB, & OD. Adunque *b* il punto O è cētro del cerchio ABCF. *b Corol. 1 prop 6. di questo.* Ma era il medesimo punto O centro dell' altro cerchio ABH; per questo i due cerchi, che si segano, anno il medesimo centro, *c* che è inconueniente. *c prop 5. di questo.* Due cerchi adunque non si segano in più che in due punti. Il che bisognaua dimostrare.

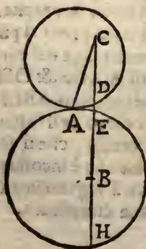
PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VII.

Eucl. 11. & 12. del lib. 3.

Vna retta linea prodotta per i centri di due cerchi, che si tocchino, passerà per il loro toccamento.





Sieno i due cerchi A E, che abbia il centro B, & AD, che habbia il cẽtro C, i quali si tocchino di dentro, ouero di fuori nel punto A. Dico i tre punti B, A, C essere in vna sola retta linea. Se ciò nõ è vero, prodotta la linea BC congiugnente i centri, seghi la circonferẽza del cerchio AE ne' punti H, & E, e la circõferenza del cerchio AD nel pũto D. E perche è stato preso il punto C, che nõ è centro del cerchio AEH (dentro lo stesso nella prima figura, e fuori nella seconda) e dal punto C per il centro B è stata tirata la retta linea CEBH, la CE, (che è l'auanzo del diametro HE) *a* sarà la minima di tutte

a prop. 6. di questo.

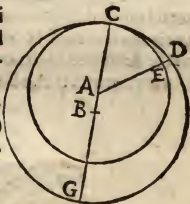
tutte le rette, che cadono dal punto C nella circonferenza del cerchio AEH. Adunque la CE è minore della CA, & è *b* CA raggio eguale al raggio CD nel cerchio AD. Perciò la CE è minore della CD, il tutto minore della sua parte, che è cosa impossibile. Adunque la retta BC congiugnente i centri (prodotta) non sega i cerchi in altro sito, che nel loro toccamento A. Il che bisognaua dimostrare. b *Ass.12. lib.1.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA VIII.

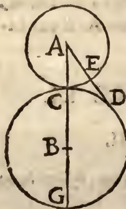
Vn cerchio tocca l'altro cerchio ò dentro, ò fuori in vn punto solamente. *Euclid. 13. del 3.*

IL cerchio CE, il di cui centro sia A, tocchi il cerchio CD, il di cui centro sia B, nel pũto C, (cioè dentro nella prima figura, e fuori nella seconda) dico che i cerchi si toccano solamente in vn punto. Tirata per il toccamẽto C, & per i centri B, & A la retta linea BAC, la quale sarà vna sola retta, come dimostrammo nella precedente proposizione, e prodotta fino al pũto G; e tirata douunque si voglia vn' altra retta AED, che seghi le



circonferenze de' cerchi ne' punti E, & D. Perche nel cerchio CD è stato preso il punto A, che non è suo centro, e da quello sono state tirate più rette linee AC, & AD, & AC il compimento del diametro CG. Adunque AG è a la minima di tutte, e perciò minore di AD. Ma AE è eguale ad AC, perche sono raggi del medesimo cerchio CE. Adunque AE è minore di AD, e però il punto D è situato di là dal punto è. Per la qual cosa il punto D della circōferenza CD cade fuori del cerchio CE; e così qualsiuoglia altro punto della circonferenza del cerchio CD si dimostrerà cadere fuori della circonferenza CE. Cadendo tutti i punti della circonferenza CDG fuori della circonferēza del cerchio CE cauatone il punto C; Adunque i detti cerchi si toccano solamente nel punto C. Il che bisognaua dimostrare.

a Pro. 6. di questo lib.





PRO-

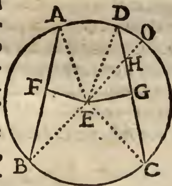
PROPOSIZIONE X.

TEOREMA IX.

Le perpendicolari tirate dal centro sopra eguali rette linee applicate nel cerchio, saranno eguali trà loro. E se le perdendicolari saranno eguali trà loro, eziandio l'applicate saranno eguali trà loro. Le dette perpendicolari si chiamino distanze dal centro delle rette linee applicate. *Eucl. 14 del lib. 3.*

NEl cerchio ABC, il di cui centro sia E, siano applicate le due rette egua li AB, & CD, alle quali sieno perpendicolari del centro E le rette linee EF, & EG. Dico EF, & EG essere eguali. Si congiungano le rette EA, EB. EC, & ED. Perche ne'due triangoli ABE, e DEC, i due lati AE, BE sono eguali à due lati DE, & CE, e le basse AB, e DC si pongono eguali. Adunque *a* gli angoli A, & D saranno eguali trà loro: ed essendo ne' triangoli AFE, DGE due angoli retti F, & G eguali, come anche si sono dimostrati eguali gl'angoli A, & D, ed eguali sono i lati AE, & DE, che sono opposti à gl' angoli retti (per esser raggi del medesimo cerchio). Adunque *b* i lati EF, & EG (che sono

a prop. 7. del lib. 1.



b prop. 25 del 1.

ſono le perpendicolari tirate dal centro ſopra l'applicate) ſono eguali tra loro.

Sieno nel ſecondo luogo le perpēdicolari EF, & EG eguali. Dico le applicate AB, & CD eſſer ancor'elle eguali. Imperciochè, ſe queſto non è vero, vna di loro ſarà maggiore dell'altra, e ſia la CD maggiore; e le perpendicolari EF, & EG tirate dal centro *c* le ſegano per mezo in G, & F. Adunque ancora la GD metà della maggiore CD ſarà maggiore della FA metà della minore. Si ſeghi adeſſo dalla maggiore *d* GD la retta linea GH eguale ad FA, e ſi congiunga la EH, la quale prodotta seghi la circonferenza in O. E perche ne' triangoli AFE, & HGE intorno à gli angoli retti F, & G, i due lati AF, & HG ſono eguali, e furono parimente eguali EF, & EG. Adunque *e* la baſe EH ſarà eguale alla baſe EA, & EA è raggio del cerchio. Per queſto EH è eguale al raggio EA, ouero ad EO, la parte eguale al tutto, che non può eſſere. Non ſarà dunque la CD maggiore della AB. Per la medeſima ragione non ſarà minore. Laonde AB, & CD ſaranno eguali, come fù propoſto. Si chiamino ora le perpendicolari EF, & EG Diſtanze delle rette linee AB, e CD dal centro E.

c *prop.* 2. *di queſto.*

d *prop.* 3. *del lib.* 1.

e *prop.* 4. *del lib.* 1.



PRO.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA X.

La massima delle rette linee applicate in vn cerchio è il diametro, e dell'altre la più vicina al centro è mai sempre maggiore della più rimota. *Eucl. 15. del 3.*

NEl cerchio ABC, il centro del quale è G, sia il diametro AF, & HI più vicina al centro, che nõ è CD. Dico la massima di tutte essere AF, e la HI maggiore di DC. Si tirino *a* dal centro le distanze, ouero le perpendicolari GK, & GL sopra la CD, & la HI, sarà la distanza GK maggiore, che non è GL per la supposizione. Si seghi *b* adũque la GM eguale alla GL, e per il pũto M si distenda *c* la BME perpendicolare alla GM, e si congiungano le rette, GB, GC, GD, & GE. Perche le distanze GL, & GM sono eguali. Adunque *d* le rette BE, & HI sono eguali trà loro. E perche le due rette BG, & GE (le quali insieme sono eguali al diametro AF) sono maggiori della *e* BE, il diametro AF sarà maggiore di BE, ouero di HI. Per la

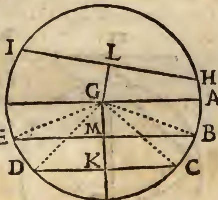
a prop. 11. del lib. 1.

b prop. 3. del lib. 1.

c prop. 10 del lib. 1.

d prop. 10 di questo.

e Prop. 21 del lib. 1.



me-

medesima ragione la AF sarà maggiore di qualunque altra CD. Di più perche i due lati BG, GE del triãgolo BGE sono eguali à due lati CG, & GD dell'altro triangolo DGC; & è l'angolo BGE maggiore dell'angolo CGD sua parte. Adunque la base *f* BE è maggiore della base CD, cioè HI è maggiore di CD. Per la qual cosa &c.

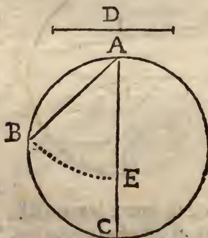
f Corol. 2. della propos. 6. di questo.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA II.

Euclid. 1. del lib. 4.

Applicare in vn dato cerchio vna retta linea eguale ad vn'altra retta linea data. Ma bisogna che la retta linea data non sia maggiore del diametro del cerchio.



NEl cerchio ABC, il di cui diametro sia AC, si dee applicare vna linea retta, che sia eguale alla data retta linea D. Ma conuiene, che la linea D sia eguale, ò minore del diametro AC, e se sarà eguale, si sara fatto il problema. Ma se D sarà minore del diametro AC, si seghi *a* la AE eguale alla medesima D. E fatto centro A col raggio AE si descriua il cerchio EB, che seghi la prima circõferen-

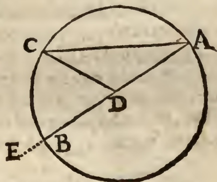
a prop. 3 del lib. 1.

ferenza in B, e si congiunga la retta AB. Dico la linea retta AB è quella, che si cercaua. Perche la retta D è stata fatta eguale ad AE, & è la AB eguale alla medesima AE (per esser raggi del cerchio EB). Adunque la retta AB applicata nel cerchio ABC è eguale alla data retta linea D. Il che conueniua fare.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XI.

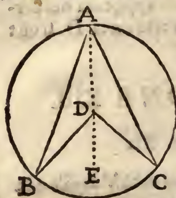
Nel cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, quando anno la medesima circonferenza per base. *Euclid. 20. del 3.*



NEl cerchio ABC, il di cui centro D, insistono sopra la base BC due angoli BDC al centro, & BAC alla circonferẽza. Dico l'angolo BDC esser doppio dell'angolo BAC. Si tiri la retta AD, che congiunga gl'angoli al centro, & alla circonferenza, e si produca fino ad E di sotto l'angolo al centro. E primieramente ADE cada nella medesima retta linea AB. Nel triangolo ADC, perche l'angolo *a* esteriore BDC è eguale a due angoli interiori, & opposti A, & *a prop.18 del lib. 1.*

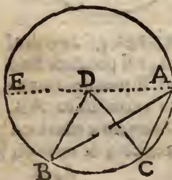
A, & C; e gl' *b* angoli A, & C sono eguali trà loro, per essere i lati DA, & DC eguali, perche son raggi del cerchio. Adũque l'angolo BDC è doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

d prop. 6. del lib. 1.



Cada poi la retta ADE ò dentro dell'angolo BDC, come nella seconda figura, ò fuori come nella terza, la quale seghi la circonferenza in E. E perche nel triangolo CDA *c* isoscele, per essere i raggi DA, e DC eguali trà loro, l'angolo *d* esteriore EDC è eguale á gli angoli DAC, & DCA eguali tra loro sopra la base AC, l'angolo EDC sarà eguale al doppio dell' angolo DAC. Di più perche nel triangolo ADB isoscele anch'egli l'angolo esteriore EDB è eguale à gl'angoli DAB, & DBA tra loro eguali, sarà l'angolo EDB eguale al doppio dell'angolo DAB. Adunque se (nella seconda figura) *e* all'angolo EDC, & al doppio dell' angolo EAC, che sono frà loro eguali, aggiugneremo l'angolo EDB, & il doppio dell' angolo EAB anche fra loro eguali, sarà tutto l'angolo BDC, che è al centro, eguale al doppio dell'angolo BAC, che è alla circonferenza. Ma nella terza figura, *f* se dall'angolo EDC, e dal doppio dell' an-

c prop. 6. del lib. 1.
d prop. 18 del 1.
e Ass. 2. del 1.



f Ass. 3. del 1.

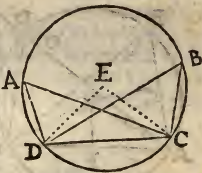
angolo EAC, che sono eguali trà loro, toglieremo l'angolo EDB, & il doppio dell' angolo EAB anche tra loro eguali, rimarà l'angolo BDC eguale al doppio dell' angolo BAC. Adunque l'angolo BDC al centro è doppio dell'angolo BAC alla circonferenza. Il che si doueua dimostrare.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA XII.

Nel cerchio gl' angoli, che sono in vna medesima porzione, sono eguali trà loro. E due angoli eguali sottesi dalla medesima retta linea volti verso le medesime parti, sono nella medesima porzione del cerchio. *Eucl. 21. del 3.*

NEl cerchio, il di cui centro E, sieno i due angoli A, & B nella porzione DABC. Dico che eglino sono eguali. Sia nel primo luogo la porzione maggiore del semicerchio, e dal centro E si congiungano le rette DE, & CE.

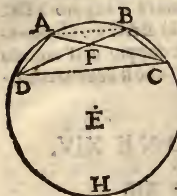


Perche a l'angolo E al centro è doppio sì dell' angolo A, come dell'angolo B alla circonferenza, auendo tutti la medesima circonferenza DC per base. Adunque gli an-

a prop. 13 di questo.

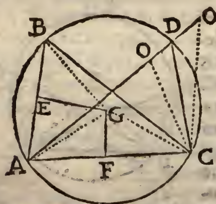
angoli A, & B ſono eguali trà loro.

Sia ſecondariamẽte la porzione DABC ò ſe-



micerchio, ouero minore del ſemicerchio, e ſi congiunga la retta AB. Manifeſta coſa è, che la porzione ADHB è maggiore del ſemicerchio, e perciò (per la prima parte di queſta propoſizione) i due angoli ADB, & BCA, che ſono poſti nella maggior porzione, ſono eguali trá loro, e ſono eziandio eguali tra loro *b* i due angoli alla cima BFC, & AFD. Adunque *c* ne' triangoli ADF, & BFC il terzo angolo DAF, ò DAC ſarà eguale all'angolo rimanente CBF, ò CBD.

b *Corol. della pr. 5 del lib. 1.*
c *Dalla prop. 18. del lib. 1.*



Sieno nel terzo luogo eguali trà loro i due angoli AB C, & ADC volti verſo le medeſime parti ſuttesi dalla medeſima retta linea AC. E ſegate *d* le A B, & AC per mezo ne' punti *E*, & F ſi tirino *e* verſo le medeſime parti le rette linee EG, FG perpendicolari ſopra la CA, & AB, le quali conuerranno in qualche luogo; come in G (come nella prima pro-

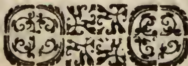
d *prop. 5. del 1.*
e *prop. 10 del. 1.*

proposizione di questo libro s'è detto) e si cōgiungano le rette linee GC, GA, GB. E perche ne' triangoli GAF, GCF intorno à gl'angoli retti ad F, i lati AF, & CF sono eguali, & GF è comune, *f* le basi GA, & GC saranno eguali tra loro. Nel medesimo modo GB sarà eguale a GA. Laonde la circonferenza del cerchio descritto dal centro G, cō il raggio GA passerà per i punti B, A, C. Si deue dimostrare adesso ritrouarsi il punto D nella medesima circonferenza della porzione ABC. Se ciò non è vero, passi tal circonferenza, se è possibile, per il punto O, collocato nella retta AD di là, ò di quà dal punto D, e si tiri la retta CO. E manifesto nella medesima porzione ABOC ritrouarsi i due angoli ABC, & AOC, e *g* perciò essere eguali trà loro. Ma l'angolo CDA per il supposto era eguale al medesimo angolo B. Adunque i due angoli ADC, & AOC saranno trà loro eguali, l'esteriore all'interiore, & opposto nel triangolo COD, *h* che non può essere. Non passa adunque la circonferenza del cerchio ABC di là, ò di quà dal pūto D, si che passerà precisamente per il punto D. Il che bisognaua dimostrare.

f Prop. 4. del lib. 1.

g Della 1. parte di questa.

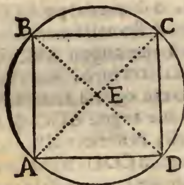
h Corol. della pr. 18. del li. 1.



PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIII.

Eucl. 22. del 3. *Gl' angoli opposti de' quadrilateri descritti nel cerchio, tutti gli angoli de' quali tocchino la circonferenza, sono eguali à due retti. E se nel quadrilatero gl'angoli opposti saranno eguali à due retti, la circonferenza d'vn cerchio passerà per i quattro punti estremi del quadrilatero.*



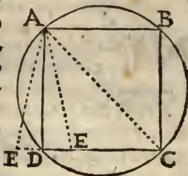
NEl cerchio, il cui centro *E*, sia descritto qualsiuoglia quadrilatero ABCD, in maniera, che tutti i suoi angoli tocchino la circonferenza. Dico i due angoli opposti ABC, & ADC essere eguali à due retti. Tirati i diametri del quadrilatero AC, & BD, saranno *a* i due angoli ABD, & ACD nella medesima porzione ABCD eguali trà loro. Similmente saranno ancora eguali trà loro i due angoli CBD, & CAD nella medesima porzione CBAD, Adunque i due angoli ABD, & CBD, cioè tutto l'angolo ABC sarà eguale à due angoli ACD, e CAD insieme, & aggiunto comunemente l'angolo CDA, i due angoli opposti ABC, & CDA insieme presi nel quadrilatero, saranno

a prop. 14 di questo.

eguali

eguali à tre angoli ACD, CAD, e CDA insieme presi; ma questi trè d'vn triangolo sono eguali *b* à due retti. Adunque i due angoli opposti A BC, e CDA sono eguali à due retti. Nel medesimo modo ancora si dimostreranno eguali à due retti i due angoli opposti BAD, & BCD. Onde la prima parte resta prouata. b *prop.* 18 *del lib.* 1.

Siano secondariamente nel quadrilatero AB CD gl'angoli opposti B, & D eguali à due retti. Dico che la circonferēza del medesimo cerchio passa per i punti A, B, C, D. Tirato il diametro CA del quadrilatero, intorno al triangolo ACB si descriua vn cerchio (come nel terzo caso della passata proposizione s'è fatto) il quale dico necessariamente passare per il punto D. Poiche se ciò non è vero; passi, se può essere per il punto E di lá, ouero di quà dal punto D nella retta linea CD, e si congiunga la retta AE. Perche si concede essere descritto nel cerchio il quadrilatero ABCE. Adunque (per la prima parte di questa proposizione) i due angoli E, & B saranno eguali à due retti: ma erano per la suppoſizione eguali à due retti gl' angoli B, & D. Adūque questi due saranno eguali à quei due, e toltone comunemente l'angolo B, l'angolo E sarà eguale all'angolo D, l'esterno all' interiore, & opposto, che è *c* impossibile. Non c *Corol. prop.* 18. *del lib.* 1.



paſſa adunque la circonferenza del cerchio per il punto E di là, ò di quà dal punto D, onde paſſerà per i punti A,B,C,D. Il che &c.

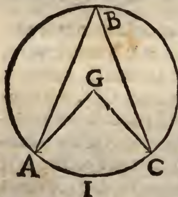
PROPOSIZIONE XVI.
TEOREMA XIV.

Eucl. 26. del lib. 3.

Ne' cerchi eguali, ò in vn medeſimo cerchio gl' angoli eguali poſti ò à i centri, ò alle circonferenze, inſiſtono ſopra circonferenze eguali.

NE' cerchi eguali, che abbiano i centri G, & H, gl' angoli al centro G, & DHF ſieno primamente eguali. Dico le circonferenze AIC, & DHF (che ſono le loro baſi) eſſere eguali trà loro. Perche i cerchi ſono eguali. Adunque *a* i quattro raggi AG, CG, DH, & FH ſono eguali:

a *Aſſ. di queſto.*



ma ſi pōgono eguali gl' angoli G, & DHF: onde ſe s'intenderà il cerchio ABC ſoprapporſi al cerchio DEF di modo, che il punto G cada ſopra il punto H, e la retta AG ſopra la HD, e l'angolo G ſopra l'angolo H, i due punti A, & C *b* caderāno neceſſariamēte ſopra i punti D, & F per cagione dell' vguaglianza sì de' raggi, come degl' angoli cōpreſi. Poſte queſte coſe è neceſſario, che la circōferēza AIC cada preciſamēte ſopra la circonferenza DKF. Im-

b *Aſſ. 9. del lib. 1.*

per;

perciochè s'ella cadesse sopra, ouero sotto, ò parte sopra, e parte sotto le, come in DNF; allora tirata dal cẽtro H la retta HKN, che seghi l'vna, e l'altra circonferenza ne' punti K, & N: perche KH è eguale al raggio HD, & HN è eguale all' HD, *c* perche sono raggi de' cerchi eguali. Adunque HK, & HN sono trà loro eguali, la parte al tutto, che è impossibile. Si che la circonferenza AIC non cade sopra, ne sotto la circonferenza DKF. Per la qual cosa è necessario, che elle s'adattino, e perciò saranno eguali trà loro. Il che nel primo luogo bisognaua dimostrare.

c *Ass. di questo.*



Siano nel secõdo luogo gl'angoli alla circonferenza B, & E eguali. Dico che essi insistono sopra eguali circonferenze AIC, & DKF. Si tirino i raggi AG, & GC, DH, & HF. Perche *d* l'angogo G al centro è eguale al doppio dell'angolo B, e similmente l'angolo DHF è eguale al doppio dell'angolo E, & il doppio dell'angolo B è eguale al doppio dell'angolo E. Adunque gl'angoli G, & DHF sono eguali trà loro, e sono al centro; perciò le circonferenze AIC, & DKF sono trà loro eguali (per la prima parte di questa proposizione). Non diuersamente si dimostreranno le medesime cose in vn'istesso cerchio. Per la qual cosa se gl'angoli B, & E saranno eguali &c. Il che bisognaua &c.

d *prop. 13 di questo.*

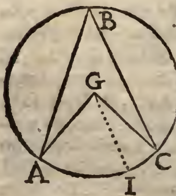
COROLLARIO.

Quindi si caua, che gl'angoli eguali al centro di due cerchi eguali, ò del medesimo cerchio insieme con le circonferenze opposte, comprendono figure eguali, e queste si chiamino Settori. Attesoche dalla suppofizione, che gl'angoli G, & H al centro fusscro eguali tra loro, si dimostrarono le figure GAIC, & HDKF adattarsi, e per ciò saranno eguali. Si chiamino ora tali figure Settori.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XV.

Eucl. 27. del lib. 3. *Gl'angoli che ne i cherchi eguali, ouero nel medesimo cerchio insistono sopra eguali circonferenze, sono trà loro eguali, ò siano posti à i centri, ò alle circonferenze.*



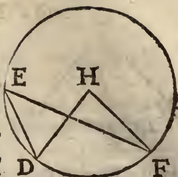
NE cerchi eguali, i centri de'quali sono G, & H, insistono primamente gl'angoli H, & AGC sopra l'eguali circonferenze AC, & DF. Dico che eglino sono eguali. Poiche se ciò nõ è vero, sia AGC maggiore, ò minore dell'angolo DHF.

Et

Et si faccia *a* l'angolo AGI eguale all'angolo H. Adũque *b* le circonferenze AI, & DF saranno eguali trà loro. Ma alla medesima circonferenza DF era eguale la circõferenza AC. Adunque le circonferenze AC, & AI sono eguali trà loro; la parte, e'l tutto, il che nõ può essere. Laonde gl'angoli AGC, & H non sono diseguali. Adunque è chiaro &c. Insistino di poi gl'angoli ABC, & E situati alla circonferenza sopra le base eguali AC, & DF. Dico che essi sono angoli eguali. Perche à cagione dell'egualità delle circonferenze AC, & DF gl'angoli à i centri G, & H sono trà loro eguali (in virtù della prima parte) mà questi sono *c* doppi degl' angoli alle circonferenze B, & E. Adunque B, & E sono eguali tra loro. La medesima dimostrazione si può adattare in vn medesimo cerchio. Il che bisognaua &c.

a prop.24. del lib. 1.

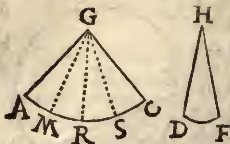
b prop.16 di questo.



c prop.13 di questo.

COROLLARIO.

Quindi è, che se in vn medesimo cerchio, ouero in cerchi eguali vna circonferenza sarà doppia, tripla, &c. dell'altra, e sopra loro insistamo gl'angoli al cẽtro, ouero i Settori, l'angolo maggiore sarà anche doppio, triplo, &c. del minore, si come il Settore maggiore sarà egualmente moltiplice del minore.



Impercioche se la circōferenza DF misurerà alquante volte la AC, v.g. quattro volte, e da punti dell' eguali diuisioni A, M,R,S,C al centro si congiugneranno rette linee *d* gl' angoli AGM, MGR, RGS, SGC, *e* ouero i Settori, saranno eguali sì tra loro, come all'angolo, ouero Settore DHF, auuenga che insistono sopra circōferenze eguali. E perciò ancora l'angolo AGC sarà quadruplo dell'angolo H, ouero il Settore AGC sarà quadruplo del Settore DHF.

d prop. 17 di questo.
e Corol. della pr. 16. di questo.

PROPOSIZIONE XVIII.

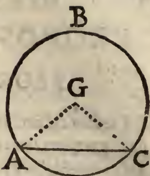
TEOREMA XVI.

Eucl. 28. e 29. del lib. 3.

Ne' cerchi eguali, ouero in vn medesimo cerchio, eguali rette linee tagliano eguali circonferenze, cioè le due maggiori saranno eguali, e le due circonferenze minori saranno trà loro eguali, & eguali circonferenze sono suttese da rette linee eguali.

NE cerchi eguali, che abbiano i centri G, & H, le applicate rette AC, & DF sieno eguali. Dico la maggior circonferenza ABC essere eguale alla maggiore DEF, e la minore AC essere eguale alla minore DF. Poiche tirati i raggi AG,

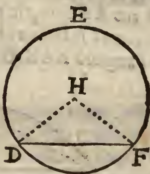
AG, GC, DH, & FH i due lati intorno all'angolo G saranno eguali a due lati intorno all'angolo H l'vno all'altro, per esser raggi di cerchi eguali, e le base AC, & DF son poste eguali. Adunque *a* gl'angoli G, & H saranno eguali, come anche saranno eguali *b* le cireonferenze AC, & DF, sopra le quali insistono. Onde le circonserenze rimanenti ABC, & DEF tagliate da cerchi eguali saranno eguali tra loro. Il che douea nel primo luogo dimostrarsi.



a *prop. 7. del lib. 1.*

b *prop. 16 di questo.*

Sieno nel secondo luogo le circonferenze ABC, & DEF eguali, ouero sieno eguali le circonferenze AC, & DF. Dico le rette AC, & DF esser eguali. Perche (fatta la medesima costruzione) le circonferenze AC, & DF sono eguali. Adunque *c* gl'angoli insistenti G, & H saranno eguali, & i lati intorno à gl'angoli G, & H sono eguali (essendo raggi de'cerchi eguali). Adunque *d* le base AC, & DF saranno eguali. Il che doueasi dimostrare nel secondo luogo. La medesima dimostrazione può seruire ad vn cerchio solo. Per la qual cosa &c.



c *prop. 17. di questo.*

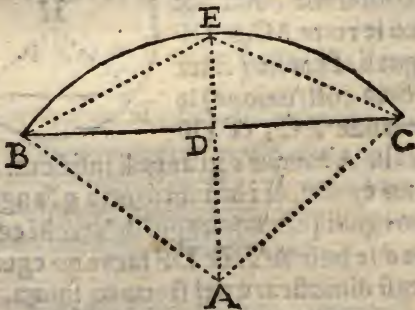
d *prop. 4. del lib. 1.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XVII.

Eucl. 30. del 3. *Se dal centro del cerchio ſi tireranno à i termini della ſteſſa porzione linee rette, & vna retta linea tirata dal centro ſegherà per mezo, ò l'angolo al centro ſolamente, ò la retta linea, che ſuttende la circonferenza, ò ſolo gl'angoli ch'ella fà alla ſuttenſa, ò pure la circonferenza della porzione; tutte l'altre coſe ſaranno ſegate per mezo.*

SIa la porzione del cerchio BEC, e dal ſuo centro A ſi tirino le rette AB, AC. E primamente la retta ADE tirata dal centro, ſeghi per mezo l'angolo BAC. Dico tanto la retta BC, quan-



to gl'angoli fatti ſopra la BC dalla retta AD, come anche la circonferenza BC eſser ſegati per mezo. Perche ne' triangoli ABD, ACD, intor-

no

no a gl'angoli eguali alla sommità A, sono i raggi AB, AC eguali, & AD commune. Adunque *a* le base BD, CD sono eguali, & eziandio eguali sono gl'angoli BDA, CDA. In oltre perche gl'angoli al centro BAE, CAE insistono alle circonferenze BE, & CE. Adunque *b* queste circonferenze sono eguali tra loro.

a *prop. 41 del lib. 1.*

b *prop. 16 di questo.*

Secondariamente la retta AE seghi per mezo la sottesa BC nel punto D. Dico tutte l'altre cose esser vere. Perche ne' triangoli BAD, CAD i lati CA, BA sono eguali, & è AD lato commune, e le base BD, CD si son poste eguali. Adunque *c* gl'angoli BAD, CAD saranno eguali. Ma quando l'angolo al cẽtro A è segato per mezo (in virtù della prima parte di questa proposizione) ancora gl'angoli al punto D sono eguali, come anche le circonferenze BE, EC. Adunque quando BC è segata per mezo, tutte l'altre cose son vere.

c *prop. 7. del lib. 1.*

Nel terzo luogo la AD faccia sopra la BD gl' angoli BDA, CDA eguali. Dico tutte l'altre cose esser vere. Perche la retta AD tirata dal centro sopra l'altra retta BC, la sega ad angoli eguali, ouero retti. Adunque *d* la BC è segata per mezo in D. Ma (per cagione della seconda parte di questa proposizone) quando la BC è segata per mezo, sono eziandio tutte l'altre cose segate per mezo. Adunque se gl' angoli al punto D son segati per mezo, saranno per mezo segate ancora l'altre cose.

d *prop. 2. di questo.*

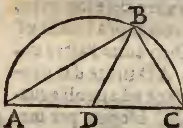
Vltimamente la retta AE seghi per mezo la circonferenza BC nel punto E. Dico tutte l'altre

cose esser vere. Perche le circonferenze BE, CE
e Prop. 17 di questo. si pongono eguali. Adunque e gl'angoli al centro, à loro insistenti sono eguali, e (per la prima parte di questa) la retta BC è segata per mezo, e gl'angoli BDA, CDA sono eguali. Per questo &c.

PROPOSIZIONE XX.

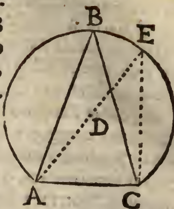
TEOREMA XVIII.

Euclid. 31. del 3. *L'angolo nel semicerchio è retto; quello che è nella maggior porzione è acuto, e quello che è nella minore è ottuso. E intorno all'angolo retto la portione è semicerchio; intorno all' angolo acuto è maggior porzione, e finalmente intorno all' angolo ottuso è porzione minore.*



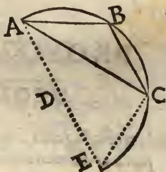
Nella portione del cerchio ABC sia l'angolo ABC. Dico egli esser retto nel semicerchio, acuto nella maggior portione, e ottuso nella porziore minore. Si tiri nel semicerchio il raggio DB, e nell'altre porzioni tirisi il diametro AE, e la retta linea CE. Perche nel semicerchio il triangolo ABD a i due lati AD, BD
a Prop. 6. del lib. 1 eguali, per esser raggi del cerchio; a Adunque gli angoli BAD, & ABD sono eguali tra loro. Per la medesima ragione nel triangolo BDC iscescele, i due angoli BCD, & CBD sopra della base saranno

ranno eguali tra loro. Adũque i due angoli BAC, & BCA insieme presi, saranno eguali a due angoli ABD, & CBD, cioè all'intero angolo ABC; ma *b* sono i tre angoli del triangolo ABC eguali a due retti. Adũque l'angolo ABC sarà la metà di due retti, e però sarà retto.



b *prop.* 18 *del* 1.

Ma nell'altre porzioni, perche AE è diametro, sarà ACE semicerchio, & in esso l'angolo ACE sarà retto (come dinanzi si dimostrò). Adunque *c* l'angolo E sarà acuto, tanto nella maggiore, che nella minor portione. E sono *d* gl'angoli E, & B eguali posti nella medesima portione maggiore. Adunque l'angolo B è acuto nella porzione maggiore. Ma nella porzione minore *e* i due angoli E, & B opposti nel quadrilatero ABCE descritto nel cerchio sono eguali a due retti, & era l'angolo E acuto. Adunque l'angolo B sarà ottuso nella minor portione.



c *Dalla prop.* 18. *del lib.* 1.

d *prop.* 14 *di questo.*

e *prop.* 15. *di questo.*

Sia secondariamente l'angolo ABC retto costituito nella porzione EABC. Dico eser egli semiceruhio. Impercioche, se ciò non è vero, sa-

rà porzione maggiore, ò minore, e perciò l'angolo ABC sarà ottuso, ouero acuto (come si mostrò nella prima parte) il che è contro il supposto. Adunque ABC non è porzione maggiore, ò minore; si che sarà semicerchio.

Terzo sia l'angolo B acuto. Dico la porzione ABC esser maggiore. Che se ciò non è vero, sarà ò semicerchio, ò minor porzione, e perciò l'angolo B sara ò retto, ò ottuso. Il che è contro al supposto. Non sarà dunque &c.

Sia nell'vltimo luogo l'angolo B ottuso. Dico la porzione ABC esser minore. Poiche, se questo non è vero, sarà ò semicerchio, ò maggior porzione, e però l'angolo B sarà retto, ouero acuto, la qual cosa ripugna al supposto. Per lo che &c.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIX.

Eucl. 16. del lib. 3.

Nel cerchio la retta linea tirata perpendicolarmente sopra al diametro dall'estremo termine di esso, caderà fuori del cerchio, e nel luogo, che è trà la stessa retta linea tangente il cerchio, e la circonferenza, non caderà alcuna altra linea retta.

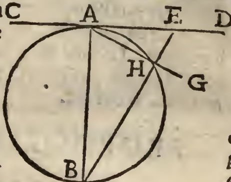
NEl cerchio ABH, il cui diametro sia AB, si tiri dall'estremo suo punto A la retta *a* CAD perpendicolare alla retta AB. Dico che la CAD cade fuori del cerchio, e che il luogo, che è

a prop. 10 del lib. 1.

trà

trà la tangente DA, e la circonferenza non è capace d'vn'altra retta linea. Da qualſiuoglia punto E preſo nella retta AD, ſi tiri all'altro eſtremo del diametro B la retta linea EB, che ſeghi la circonferenza nel punto H. E perche la maſſima delle rette linee *b* BA, BH applicate nel cerchio è il diametro BA. Adunque la retta linea BA è maggiore della BH. E perche nel triangolo BAE l'angolo BAE è retto. Adunque l'altro angolo *c* AEB è acuto, e perciò minore del retto. Laonde il lato BE *d* ſotteſo all'angolo maggiore, ſarà maggiore del lato BA: ma BA era maggiore di BH. Adunque BE ſarà maggiore di BH; & il punto H è nella circonferenza del cercio; e perciò il punto E caderà fuori del cerchio, e così qualſiuoglia altro punto della retta AD, eccettuato il punto A. Adunque tutta la retta linea AD cade fuori del cerchio.

b prop. 11 di queſto.



c Della prop. 18. del lib. 1.

d prop. 20 del lib. 1.

Poi dal punto del contatto A ſi tiri qualſiuoglia retta linea AG tra la tangente, & il diametro BA. E ſi faccia *e* l'angolo ABH eguale all'angolo DAG. Perche i due angoli ABH, & DAG ſono eguali, aggiunto comunemente l'angolo BAH, i due angoli HBA, & BAH inſieme preſi ſaranno eguali à i due angoli BAG, & GAD, i qua-

e prop. 24 del lib. 1.

quali costituiscono l'angolo retto BAD. Adunque quelli due angoli sono eguali ad vn'angolo retto, e perciò le rette linee *f* BH, AH concorrono; e fanno *g* l'altro angolo AHB retto, il quale *h* sarà nel semicerchio; e per questo la retta GA sega il cerchio ne' punti H, & A. Per la qual cosa la retta linea HA *i* cade dentro il cerchio. Adunque qualsiuoglia retta linea tirata sotto la tangente dal punto A, segherà necessariamente il cerchio. Laonde non può tirarsi vna retta linea nel luogo, che è trà la tangente, e la circonferenza. Il che &c.

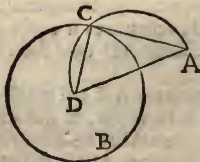
f Prop. 29 del lib. 1.
g Dalla prop. 18. del lib. 1.
h *prop. 20 di questo.*
i *prop. 4. di questo.*

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA III.

Da vn dato punto posto fuori del cerchio, tirare vna retta linea, che tocchi il dato cerchio.

Eucl. 17. del lib. 3.



DAl punto esteriore A dee tirarsi vna retta linea, che tocchi il cerchio BC, il di cui centro sia D. Si tiri la retta AD, sopra la quale si descriua il semicerchio ACD, che seghi la circonferenza del cerchio BC nel punto C, e si congiunga la retta linea AC. Dico

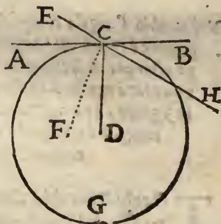
che

che AC tocca il cerchio BC nel punto C. Si congiunga la retta linea DC. Perche *a* l'angolo ACD nel semicerchio è retto. Adunque la CA perpendicolare al semidiametro DC, tirata dal suo estremo C, *b* toccherá necessariamente il cerchio BC in C. Il che bisognaua fare. *a prop. 20 di questo.* *b prop. 21 di questo.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XX.

Se vna retta linea toccherà il cerchio, quella che è tirata dal centro al contatto sarà perpendicolare alla tangente. E se si eleuerà vna perpendicolare alla tangente dal punto del contatto, ella passerà per il centro del cerchio. *Eucl. 18. & 19 del lib. 3.*



Tocchi la retta AB nel punto C il cerchio CG, il cui centro sia D, e si congiunga la retta CD. Dico primamente la retta CD essere perpendicolare alla AB. Se questo è falso, si tiri *a* dal punto C sopra CD la perpendicolare EH. E manifesto, *b* che la retta EH tocca il cerchio, e perciò *c* AB segherà il cerchio, il che è contro il supposto. *a prop. 10 del 1.* *b prop. 21 di questo.* *c prop. 21 di questo.*

La-

Laonde non è possibile, che CD non sia perpendicolare alla AB. Il che douea prima dimostrarsi.

Sia secondariamente la CD perpendicolare alla tangente AB in C punto del suo contatto. Dico che 'l centro del cerchio si ritroua nella CD. Perche se ciò è falso, sia F il centro del cerchio situato fuori della linea CD, e si congiunga la FC. Adunque per la prima parte di questa proposizione FC sarà perpendicolare sopra la AB. Laonde i due angoli FCB, & DCB saranno retti, e perciò eguali, la parte, e'l tutto, il che è impossibile. Non può adunque ritrouarsi il centro F fuori della linea CD. Per la qual cosa &c.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXI.

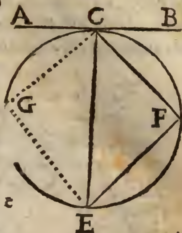
Eucl. 13. del 3.

Nel cerchio l'angolo compreso dalla tangente, e dalla segante è eguale all'angolo constituito nella porzione alterna. E se l'angolo situato nell'alterna porzione sarà eguale à quello, il quale è contenuto dalla segante, e da vn'altra cadente nella circonferenza del cerchio, la cadente retta linea toccherà il cerchio.

TOcchi il cerchio CGE la retta AB nel punto C, dal quale primamente si tiri per il centro la retta CE. Dico l'angolo ACE essere eguale all'angolo F nella porzione alterna, e l'angolo BCE essere eguale all'angolo CGE.

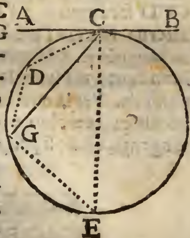
Per-

Perche *a* l' vno, e l'altro angolo ACE, & BCE è retto; e sono eziandio *b* retti ne' semicerchi gl'angoli F, & CGE. Adunque l'angolo ACE è eguale all'angolo F, & all'angolo CGE è eguale l'angolo BCE.



a prop.23 di questo.
b *prop.20 di questo.*

Passi secondariamente la retta CG nō per il centro, e si tiri il diametro CE, e si congiunga la GE. Si deue dimostrare l'angolo ACG essere eguale all'angolo CEG nell'alterna porzione, e l'angolo BCG essere eguale all'angolo D. Perche nel semicerchio *c* l'angolo CGE è retto. Adunque *d* nel triangolo CGE gl'altri due angoli GEC, & GCE sarāno eguali ad vn sol retto, cioè *e* sono eguali all'angolo retto ACE. Toltone adunque comunemente l'angolo GCE, sarà l'angolo ACG eguale all'angolo CEG nella porzione alterna. Dopoi perche nel quadrilatero *f* CDGE, i due angoli opposti D, & E sono eguali à due retti, e sono eziādio *g* eguali a due retti i due angoli ACG, & BCG;



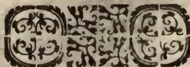
c prop.20. di questo.
d *Dalla prop.18. del lib I.*
e prop.23. di questo.
f prop.15. di questo.
g prop.12 del 1.

& BCG; ed erano gl'angoli ACG, & E eguali trà loro. Adunque gl'angoli rimanenti BCG, & D saranno tra loro eguali.

Nel terzo luogo dal medesimo punto C della circonferenza CDE si tirino le rette linee CD, che seghi il cerchio, & AB, che vi cada sopra, e sia l'angolo ACD eguale all'angolo E nella porzione alterna. Dico che AB tocca il cerchio. Imperciochè, se ciò non è vero, si tiri la *h* GH, che tocchi il cerchio nel punto C. Adunque l'angolo *i* GCD sarà eguale all'angolo E nella porzione alterna. Ma era l'angolo ACD eguale al medesimo angolo E. Adunque gl'angoli ACD, & GCD sono eguali tra loro, la parte, e'l tutto, che è impossibile. Per la qual cosa niuna altra retta GH toccherà il cerchio, e però la AB solamente sarà tangente, come si propose.

h prop. 21 di questo.

i Dalla 1. parte di questa proposizione.



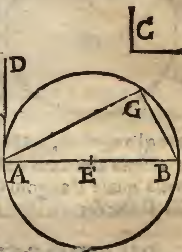
PRO-

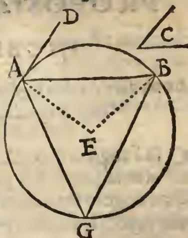
PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA IV.

Sopra vna data retta linea descriuere vna portione di cerchio, la quale sia capace d' vn' angolo eguale ad vn' angolo dato. *Eucl. 33 del lib. 3.*

SOpra la data retta AB si deue descriuere la porzione d' vn cerchio, che sia capace d' vn' angolo eguale al dato angolo C. Si faccia *a* l'angolo DAB eguale all' angolo C, e se AB è perpendicolare sopra la AD, ella si seghi *b* per mezo nel punto E. Ma se non è perpendicolare, si *c* eleui AE perpendicolare sopra la AD, l'angolo EAB sarà acuto, auuengache egl' è la differenza dell' angolo BAD dal retto. E si faccia l'angolo *d* ABE eguale all'angolo BAE acuto. Adunque *e* AE, & BE concorreranno nel punto E, e saranno *f* eguali tra loro. Si





a prop. 14 del lib. 1.

b prop. 9. del 1.

c prop. 10. del lib. 1.

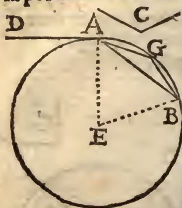
d prop. 14 del lib. 1.

e Prop. 29 del lib. 1.

f prop. 20. del 1.

che il cerchio descritto co'l far cētro E, & interuallo AE, passerà per il pūto B, e sarà tocco g dalla retta DA, per essere ella perpēdicolare al raggio AE. Si tirino da qualsiuoglia punto G della portione AGB due rette linee GA, & GB. Dee

g prop. 21 di questo.



dimostrarsi l'angolo AGB costituito nella data porzione essere eguale al dato angolo C. Perche all'angolo DAB h compreso dalla tangente, e segante, è eguale l'angolo G nella porzione alterna; ed era eguale al medesimo angolo DAB l'angolo C. Adunque gl'angoli G, & C sono eguali tra loro. Per la qual cosa abbiamo descritto la portione AGB, nella quale l'angolo G è eguale al dato angolo C. Il che &c.

h prop. 24 di questo.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA V.

Eucl. 34. del lib. 3.

Da vn dato cerchio tagliare vna porzione capace d'vn angolo eguale ad vn'angolo dato.

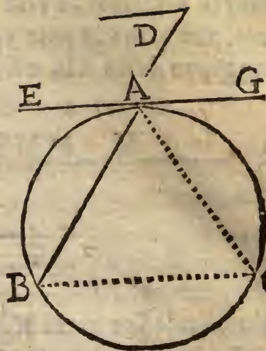
SIa l'angolo dato D, & il cerchio ABG, da cui dee tagliarsi vna porzione, che sia capace d'vn'angolo eguale all'angolo D. Si tiri *a* EG, che tocchi il cerchio nel punto A; Si faccia dopoi

a prop. 21. di questo.

poi *b* l'angolo EAB eguale all'angolo D, e da qualsiuoglia pũto C della circonferenza ACB, si tirino due rette linee CA, & CB. Dee dimostrarsi l'angolo C essere eguale all'angolo D. Perche *c* nell'alterna porzione l'angolo C è eguale all'angolo EAB, & al medesimo angolo EAB è eguale l'angolo D per la costruzione. Adunque l'angolo C è eguale all'angolo D. Abbiamo adunque segata la porzione ACB, nella quale l'angolo C è eguale al dato angolo D. Il che conueniua fare &c.

b prop. 24 del lib. 1.

c prop. 24 di questo.



PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XXII.

Se saranno due rette linee disequali, e dalla maggiore se ne tolga via la metà, e se ne leui di nuouo dalla rimanente vn'altra metà, e questo si reiteri sempre, rimarà finalmente vna linea, che sarà minore della minor proposta linea.

Euclid. 1. del lib. 10

SIeno le duè rette linee AB maggiore, e C minore. Dico che se dalla maggiore, e dagl' auanzi suoi si leueranno via mai sempre le metà,

rimarrá finalmente vna linea minore della C. Si moltiplichi la C tante volte, che ne vẽga la DH maggiore della AB, e si distribuisca la DH nelle sue parti DE, EF, FG, & GH eguali alla medesima C. Si leui dopoi dalla *a* AB la sua metà AK, e dalla rimanente KB si leui eziandio la sua metà KM, e ciò si reiteri sempre, finche le parti AK, KM, MN, & NB segate nella medesima AB diuengono tante in numero, quante sono le parti dell'altra DH: il che certa cosa è potersi fare; potendosi la quantità continua mai sempre diuidere. Dee dimostrarsi l'estrema portione NB esser minore della retta linea C. Perche dalla minore AB se ne leua la sua metà AK, e dalla maggiore DH se ne leua il pezzo DE minore della sua metà; sarà la rimanente KB minore della residua EH. E perche di nuouo dalla minore KB se ne leua la sua metà KM, ma dalla maggiore EH se ne leua il pezzo EF, non maggiore della sua metà. Adunque la rimanente MB sarà minore della rimanente FH. Si leua in fine dalla minore MB la sua metà MN, e dalla maggiore FH si leua via FG non maggiore della sua metà, e cosi sempre. Vna volta adunque l'vltimo auãzo NB sara minore di GH, ouero di C, che l'è eguale. Che è quello che si cercaua.

A K M N B
C
D E F G H

a prop. 9. del lib. 1.

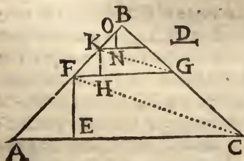
PRO-

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA VI.

Nel triangolo isoscele rettangolo la differenza del lato, dell'Ippotenusa è minore della metà del lato, la quale si può di nuouo segare in maniera, che la sua minor porzione sia eguale alla differenza delle porzioni precedenti, e così sempre, finche l'estrema porzione sia minore di qualunque data retta linea.

SIa il triangolo Isoscele ABC rettangolo in B, e la retta linea D sia di qualsiuoglia piccolezza. Dee dimostrarsi la differenza dell'ippotenusa AC, e del lato BC esser minore della metà di AB, e potersi la medesima differenza segare come si cerca. L'angolo AGB *a* si diuida in mezo dalla retta linea CF, la quale seghi la retta AB in F, e dal *b* punto F si tiri la perpendicolare FE alla AC, che la seghi in E, e si distenda *c* la retta FG parallela alla medesima AC, che seghi BC in G. E perche a cagione delle parallele *d* l'angolo BGF è eguale all'angolo C, e l'angolo BFG eguale all'angolo A, e *e* gl'angoli A, & C sono egua-



a prop. 8. del lib. 1.
b prop. 11 del lib. 1.
c Corol. prop. 17. del lib. 1.
d prop. 15 del lib. 1.
e prop. 6. del lib. 1.

eguali alla base dell'isoscele ABC. Adunque sonò
f prop. 20. del lib. 1. eguali ancora gl'angoli BFG, e BGF, e *f* perciò i lati BG, GF sono eguali, e'l triangolo BFG è isoscele. Di più perche ne' triangoli CEF, e CBF, l'angolo BCF è stato fatto eguale all' angolo ECF, e eguali sono i due angoli retti B, & E, e'l latò CF opposto a gl'angoli retti B, & E è commune.
g prop. 25 del 1. Adūque *g* CB è eguale à CE, e BF è eguale a EF, e però AE sarà la differenza del lato BC, e dell'ippotenusa AC. Ed essendo ne' triangoli FBG, & FEA i due angoli B, & E retti, e gl'angoli BGF, & A eguali, a quali sono opposti i lati eguali FB,
h prop. 25 del 1. & FE. Adunque *h* AF è eguale ad FG, & AE è eguale a GB, ouero ad FB a lui eguale. Et è nel
i prop. 20. del 1. triangolo AEF il lato AF (opposto all'angolo retto, e perciò *i* al massimo AEF) maggiore di AE. Adunque AF è maggiore di FB. Laonde la minor porzione BF è eguale ad EA differenza del lato BC, e dell'ippotenusa AC del medesimo triangolo ABC.

k prop. 8. del 1. Tirata in oltre *k* la retta GK, che seghi in mezo l'angolo G, e tirata la KH *l* perpendicolare
l prop. 11. del 1. alla FG, che la seghi in H, sarà, come sopra, la minor porzione KB eguale ad FH differenza delle stesse BG, & GF; & era BG eguale a BF, & FG eguale ad AF. Adunque KB minor porzione di tutta la FB è eguale alla differēza delle precedenti porzioni AF, & FB. E perche il continuo è mai sempre diuisibile, potrà di nuouo segarsi KB in O, in maniera che BO sia la minor porzione, e sia eguale alla differenza delle portioni

ni FK, KB, e così sempre. Ed essendo due rette linee AB, & D, e dalla maggiore AB tagliandosene maggior porzione, cioè più della sua metà, e dall'auanzo FB tagliandosene FK più della sua metà, e dalla KB tagliandosene similmente KO più della sua metà, e così mai sempre. Adunque *m* l'vltima porzione OB sarà minore di qualunque data retta linea D. E tutte le minori porzioni tagliate sono differenze delle precedenti porzioni. Onde il problema si è fatto.

m prop. 27 di questo.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XXIII.

Eucl. 116 del lib. 10

Nessuna retta linea, che misuri il lato del quadrato, può misurare il diametro di detto quadrato. Si chiamino il lato, & il diametro del quadrato, linee rette incommensurabili trà loro.

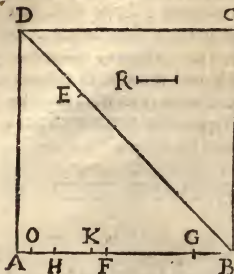
SIa il quadrato ABCD, il di cui diametro BD, e la retta linea R misuri il lato AB dello stesso quadrato AC, e sia R qualsiuoglia retta linea delle innumerabili, che possono misurare la medesima AB. Dico che la retta R non mai misura il diametro BD. Imperciochè, se ciò non è vero, la retta R misuri ancora il diametro BD. E perche nel quadrato *a* AC l'angolo A è retto, & i due lati DA, & AB sono eguali, il triangolo BAD isoscele sarà rettangolo. Laonde *b* fatta la BE eguale alla AB, & AF segata eguale alla DE differenza del lato AB, e dell' ippotenusa BD, sarà

a prop. 34. del 1.

b prop. 3. del 1.

la

c prop. 28 di questo. c la AF meno della metá, cioè sarà porzione minore di AB. E di nuouo fatta FG eguale alla AF, e segata la AH eguale alla GB, che è la differenza delle porzioni AF, FB, sarà anco la AH minor porzione di AF. E da capo fatto HK eguale alla HA, e segata AO eguale alla KF differenza delle porzioni AH, & HF, sarà parimēte AO minor porzione di AH. E questo potrà mai



sempre farsi, fin che l'vltima porzione, la quale sia AO, diuenga minore di qualunque data retta linea R. E perche la retta R si pone misura di AB, e dell'altra DB, e de la EB eguale ad AB. Adunque la retta R misura tutta la DB, e la sottratta BE. Laonde la retta *d* R misurerá ancora la rimanente differēza DE, & è AF eguale a DE. Adunque R misura la stessa AF, e prima misuraua tutta la AB. Adunque la *e* medesima R misurerà la rimamente FB, & anco la stessa AF, e perciò ancora misurerà la loro differēza GB, ò AH (eguale alla GB) ma misuraua la medesima R eziandio la AF. Adunque misurerà ancora la rimanente HF; e misuraua parimente la AH. Laonde la R misura la loro differenza KF, e perciò

d *Ass.* 6. del lib. 1.

e *Ass.* 6. del 1.

la

la AO a lei eguale. Per la qualcosa la retta *f* R sarà eguale, ò minore di AO (poiche la maggiore non può misurare la minore) la qual cosa è impossibile. Attesoche la retta AO si fece minore della R. Si che non si può ritrouare alcuna retta linea R per piccola che sia, la quale misuri il diametro BD, & il lato AB del medesimo quadrato AC. Il che &c. Si chiamino le rette linee AB, & DB incommensurabili tra loro.

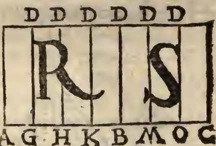
f Diff. 13. del 1.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XXIV.

Se saranno due rette linee incommensurabili, gli spazi parallelogrammi, ouero i triangoli sopra loro descritti egualmrnte alti saranno incommensurabili trà loro.

SIeno due rette linee AB, & BC incommensurabili, le quali sieno basi de' parallelogrammi, ouero de triangoli R, & S, che abbino la medesima altezza.





Dico i parallelogrã-mi, ouero i triangoli R, & S essere incommensurabili tra loro. Poiche, se ciò non è vero, abbiano gli spazi R, & S qualche misura comune, se è pos-

possibile, la quale si ponga essere X, e quante volte X misura lo spazio R in tante parti *a* eguali tra loro AG, GH, HK, KB si scompartisca la retta linea AB: e quante volte X misura lo spazio S, in tante parti eguali BM, MO, OC si distribuisca la retta BC, e da i punti G, H, K, M, O si tirino *b* parallele, che facciano parallelogrammi nel primo caso, ò concorrendo nel medesimo punto D facciano triangoli, come nel secondo caso; *c* i parallelogrammi AGD, GHD, HKD, KBD, ouero *d* i triangoli saranno eguali trà loro; auuenga che le basi loro sono eguali, e sono tra le medesime parallele. Et eziandio i parallelogrammi COD, OMD, MBD, ouero triangoli saranno trà loro eguali. E perche X tante volte misura lo spazio R, quante volte la KB misura la base BA; e quante volte la KB misura la base BA, tante volte lo spazio KBD misura lo spazio R (comparando sempre i parallelogrammi trà di loro, ouero i triangoli trà di loro). Adunque la X, e lo spazio KBD misurano egualmente lo spazio R; e perciò gli spazi X, & KBD sono eguali tra loro, essendo eguali à qualsiuoglia parte di quelle, nelle quali si risolue lo spazio R. Per la me-

a *prop.* 28 *del lib.* 1.
b *Corol. prop.* 16. *del lib.* 1.
c *prop.* 30 *del* 1.
d *prop.* 31 *del* 1.



medesima ragione lo spazio MDB sarà eguale allo spazio X. Laonde i due spazi KBD, & MDB saranno eguali trà loro, essendo amendue eguali al medesimo spazio X, e sono della medesima altezza. Adunque le lor base KB, & BM sono trà loro eguali (imperciochè se elleno fossero diseguali, sarebbero eziandio diseguali i e parallelogrammi, ouero f i triãgoli KBD, & MBD, la qual cosa è contra l'ippotesi): ma la KB misura la AB, e la BM misura la BC. Adunque le due rette AB, & BC sono trà loro commensurabili, essendo misurate dall'eguali KB, & BM, ouero dalla medesima KB, che è contra il supposto: atteso-che furono poste AB, & BC incommensurabili. Non possono adunque gli spazi R, & S auere alcuna misura comune, e perciò sono incommensurabili. Il che &c.

e *Dalla prop. 31. del 1.*

d *Dalla prop. 31. del 1.*

SCOLIO.

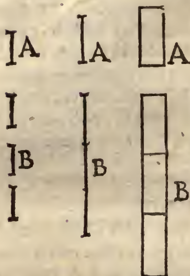
Si come si è dimostrato le linee rette, e gli spazi, ò triangoli, ò parallelogrammi potere essere incommensurabili, così dimostreremmo ancora tutte le quantità continue del medesimo genere poter essere trà loro incommensurabili. Deuono però escludersi da questo ordine i numeri; auuengache ne' numeri col diuidere, si può arriuare al minimo nel suo genere, cioè all' vnitade: ma ciò nella quantità continua in nessun modo è possibile, perche è mai sempre diuisibile: e così nel di lui genere non si dà minimo, il quale possa esser misura comune di due quantitadi continue.

Fine del Libro secondo.

LIBRO TERZO

Delle comparazioni delle quantità.

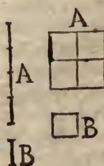
DIFFINIZIONI.



I.

LA minor quantità si dice parte della quantità maggiore, quando la minore misura alcune volte la maggiore.

II.



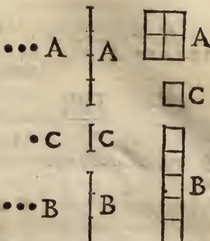
A....
B.

Ma la maggior quantità si dice moltiplice della minor quantità, quãdo la maggiore è misurata dalla minore.

La

III.

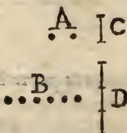
La quantitá maggiore, ouero minore si dice parti d'vn'altra quantità, quando può ritrouarsi vna terza quantità, che sia loro misura comune.



Di due quantità del medesimo genere, se la prima A misura la seconda B, chiamerò la prima parte della seconda denominata dal numero delle parti contenute in essa, come vn mezo, vn terzo &c. E se la prima A sarà misurata dalla seconda B, dirò A esser moltiplice di B, come doppia, tripla, &c. Ma se la prima A, e la seconda B saranno misurate da vna terza C, chiamerò A parti di B, come tre quarti, quattro terzi &c.

IV.

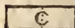
Medesima parte si chiama la prima quantità della seconda, e la terza della quarta, quádo la prima misura tante volte la seconda, quante la terza misura la quarta.



Et

V.

A

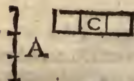


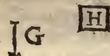
B

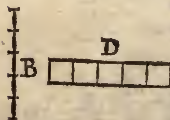


Et egualmente moltiplice vien detta la prima quãtità della ſeconda, come è la terza della quarta, quando la prima, e la terza vengono dalla ſeconda, e dalla quarta miſurate egualmente.

V I.







Si dice medeſime parti la prima quantità della ſeconda, ſi come la terza, e parti della quarta quantità, quando due qualunque quantità miſurano egualmẽte la prima, e la terza, e miſurano eziandio egualmente la ſeconda, e la quarta.

Di quattro quantità (ò ſiano le due prime del medeſimo genere con le ſeconde, ò nò) ſe la prima A tante volte miſura la ſeconda B, quante la terza C miſura la quarta D. Dirò la prima della ſeconda, e la terza della quarta eſſer la medeſima parte. E ſe la A tante volte ſarà miſurata da B, quante volte la C è miſurata da D. Dirò la prima, e la terza eſſere equi-

mol-

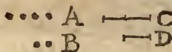
moltiplici della ſeconda, e della quarta. Ma ſe A, & C ſaranno egualmente miſurate dalle G, & H, e parimente le B, & D ſaranno egualmente miſurate dalle ſteſſe G. & H. Dirò la A della B, & la C della D eſſer le medeſime parti.

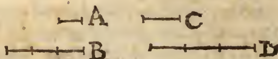
VII.

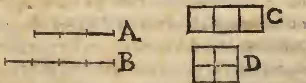
Se vna antecedente quantità ſarà moltiplice, ò parte, ò parti d'vna quantità conſeguente. Si chiami la comparazione della prima, con la ſeconda proporzione commenſurabile. E ſi dirà auer la prima alla ſeconda proporzione commenſurabile. E ſe niuna altra quantità, che abbia commenſurabile proporzione alla conſeguente, può eſſere eguale all'antecedēte, ma è mai sēpre maggiore, ò minore di quella ſi dira l'antecedente auere alla conſeguente proporzione incommenſurabile.

VIII.

Dirò vna proporzione commēſurabile eſſere la medeſima, che vn' altra proporzione; quando il primo termine del ſecondo, ed il



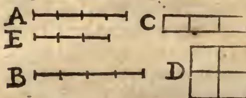


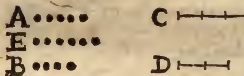


terzo del quarto saranno equimoltiplici, ò la medesima parte, ò pure le medesime parti: e tali quantitá si diranno proporzionali commensurabili.

I X.

Chiamo la proporzione della prima alla seconda maggiore della proporzione commensurabile, che ha la terza alla quarta, quando la prima auanza quella, la quale alla seconda sta come la terza alla quarta. E dirò la proporzione della prima alla seconda esser minore della proporzione cômensurabile, che hà la terza alla quarta, quando la prima è minore di quella, che alla seconda stà come la terza alla quarta.





Sia la proporzione di C à D cômensurabili, v. g. sia C tre parti quarte di D. Mà A sia maggiore di tre quarti di B, sì che sarebbe necessario scemare qualche cosa da A, acciò che ella diuenisse tre quarti di B. Allora dirò la proporzione di A à B esser maggiore della proporzione commensurabile che hà C à D. Se poi A sarà minore di tre quati di B, cioè sarebbe necessario accrescere la A, accioche ella diuenisse tre quarti di B, allora

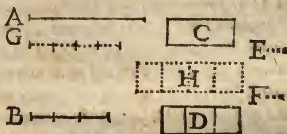
ra dirò la proporzione di A à B esser minore della proporzione commensurabile, che hà C à D.

X.

E chiamerò vna proporzione maggiore d'vn' altra incommensurabile proporzione; quando la prima proporzione è maggiore, ma la seconda proporzione è minore d'vna medesima terza proporzione commensurabile.

X I.

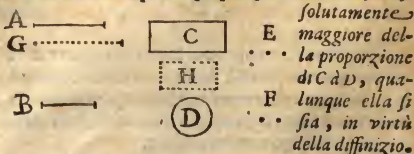
Ma vna proporzione sarà minore d'vn' altra incõmensurabile, quando



la prima proporzione sarà minore, ma la seconda proporzione sarà maggiore della medesima terza proporzione commensurabile.

Sia la C incommensurabile à D, se egli è vero, che delle innumerabili proporzioni commensurabili se ne troui pur vna, quale è quella di E ad F di tal condizione, che la proporzione di A à B sia maggiore di quella di E ad F, ma la proporzione di C à D sia minore di quella stessa, che hà E ad F; cioè sendo v.g. E quattro terzi di F, se egli è vero che A sia maggiore di quattro terzi di B, ma C sia minore di quattro terzi di D. Al-

loro dirò la proporzione della A à B esser maggiore dell' incommensurabile proporzione che hà C à D. E concedendo, che la prima proporzione di A à B sia as-



solutamente maggiore della proporzione di C à D, qualunque ella si sia, in virtù della diffinizione, necessariamente la proporzione di A à B douerà esser maggiore, ma la proporzione di C à D non sarà d'vna terza proporzione commensurabile qualunque ella si sia; ponghiamo esser quella di E ad F, cioè sia come quattro à tre. Dourà dunque A esser maggiore di quattro terzi di B, ma la C non sarà maggiore di quattro terzi di D, cioè C ò sarà quattro terzi, ò meno di quattro terzi di D. Dal che ne siegue, che vi sarà in natura qualche quantità minore della prima A, quale è v.g. G, che sarà quattro terzi di B, e vi sarà parimente in natura qualche quantità non minore di C, cioè eguale, ò maggiore di essa C, quale è v.g. H, la quale sia quattro terzi di D.

Lo stesso discorso si può adattare alla minor proporzione.

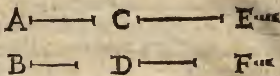
X I I.

Ma se nelle medesime quattro quantità, la proporzione della prima quantità alla secōda nō sarà maggiore, ne minore di quella proporzione incommensurabile, che hà la terza alla quarta

quan-

quantità, la proporzione della prima quantità alla seconda, si chiami medesima, ouero simile alla proporzione incommensurabile, che ha la terza alla quarta quantita. E somiglianti quattro quantità si chiamino proporzionali incommensurabili.

Per asserire, che quattro quantità, A, B, C, D, sieno propor-



zionali incommensurabili, è necessario, che la proporzione di A à B non sia maggiore, ne minore della proporzione incommensurabile, che hà C à D, cioè sarà impossibile, che si ritroui qualche proporzione commensurabile frà le infinite, che si possono asseguare, quale è quella di E ad F di tal condizione, che la proporzione di A à B sia maggiore, ma la proporzione di C à D sia minore della medesima proporzione, che hà la E ad F. Parimente sarà impossibile, che la proporzione di A à B sia minore, e la proporzione di C à D sia maggiore della medesima proporzione commensurabile di E ad F.

ASSIOMI.

I.

Se vna prima quantità misurerà vna seconda, e la seconda vna terza, la prima misurera ancora la terza.

Esempi grazia, se la quantità A misura la seconda BC, e BC misura la terza DE. E manifesto, che la pri-

A
B C
D E
F G

ma A misura ancora la terza DE. Imperciochè spartita la DE nelle parti DF, FG, GE, ciascuna delle quali sia eguale alla BC, essendo che la A misura la BC, la medesima a *A misurerà eziandio ciascheduna parte DF, FG, GE; e perciò la stessa A misurerà tutta la DE delle dette parti composta.*

a *Ass. 6. del 1.*

I I.

Proposte trè quantità, quella proporzione, che hà la prima alla seconda, auera la terza à qualche altra quantità del medesimo genere.

I I I.

E quella proporzione, che hà la prima alla seconda, auerà qualche altra quantità del medesimo genere alla terza.

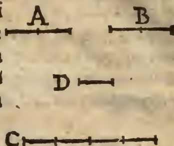
A C
B D

Come per esempio, se vien data qualche proporzione della quantita A à B. Manifesta cosa è, che vna terza quantità C à qualche altra quantità del medesimo genere D, hà la medesima proporzione, che hà A à B. Auuenga che se bene talora non si sà quale sia quella quarta quantità, egli è certo però ritrouarsi ella in natura. Imperciochè di qualsiuoglia data quantità

tità C, si dà ancora qualsisia moltiplice, ò parti di lei. Ma se è la proporzione della A à B incommensurabile, quale è quella, che hà il diametro al lato del medesimo quadrato, se si suppone esser la C diametro d'vn'altro quadrato, si potrà dare il suo lato che sia B.

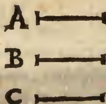
IV.

Se di due quantità eguali l'vna sarà parti di qualche terza, l'altra ancora sarà le medesime parti della medesima terza, come era la prima.



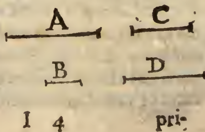
V.

I manco termini, che si richieggono per esprimere due proporzioni, saranno trè, prendendosi vno, come due conseguenti, ò come due antecedenti, ouero vno solo come antecedente d'vna proporzione, e conseguente dell'altra.



VI.

Se di quattro quantità sarà la prima maggiore della seconda, ma la terza non è maggiore della quarta, auerà la



prima alla seconda maggior proportione, che non ha la terza alla quarta.

Imperciochè essendo A maggiore di B, e C non maggiore di D, la proporzione della a *quantità prima alla seconda sarà maggiore della commensurabile proporzione di egualità, per esser la prima A maggiore della seconda B; ma la proporzione della terza C alla quarta D, non sarà maggiore della medesima commensurabile proporzione di egualità, ponendosi la terza non maggiore della quarta. Laonde è chiaro, in virtù della decima diffinizione, auer la A alla B maggior proporzione, che la C alla D.*

a *Dif. 9. di questo.*

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I.

Se due quantità di altre due quantità saranno equimoltiplici, vicendeuolmente saranno insieme eguali, ò insieme maggiori, ò minori.

SIeno le quattro quantità, ò grandezze, ouero numeri AB, E, CD, & F tutte del medesimo genere, & AB sia tanto moltiplice di E, quanto CD è moltiplice dell'altra F; e sia primieramente E eguale ad F. Dico AB essere eguale à CD. S'intendano AB, & CD diuise nelle sue parti. E manifesto *a* tante parti AG, GH, & HB esser cõtenute in AB ciascheduna eguale ad E, quante parti CI, IK, e KD son contenute in CD, ciascheduna eguale alla medesima F. Adunque AG, & CI es-

a *Dif. 5. di questo.*

CI essendo eguali alle eguali E, & F, saranno ancora eguali trà loro, e parimente GH, IK, come anche HB, e KD saranno tra loro eguali. Ora se alle eguali AG, CI si aggiūgono le eguali GH, IK, saranno tutte le *b* AH, & CK eguali tra loro, e se alle medesime di nuouo si aggiungono le eguali HB, & KD, saranno le intere AB, e CD eguali frà di loro. Laonde quando la E è eguale alla F, ancora la AB è eguale alla CD.

b *Ass.* 2. *del lib.* 1.

A G H B   C I K D

E   F

A G H B   C I K D

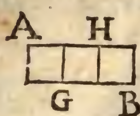
E   F

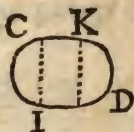
Sia secondariamente la E maggiore della F. Dico la AB esser maggiore della CD. Diuise l'equimoltiplici, come sopra, la AG sarà maggiore della CI, atteso che quella è eguale alla maggiore E, e questa alla minore F. Per la medesima ragione la GH sarà maggiore della IH, e la HB maggiore della KD. Ora se alla maggiore AG si aggiunge la maggiore GH, e se alla minore CI si congiunge la minore IK; e di più se alle medesime nella medesima maniera si accrescono altre parti diseguali, tutta la AB sarà maggiore della CD.

Terzo sia la E minore della F. Dico la AB esser minore della CD. Perche la E è minore della F. Adunque la F sarà maggiore della E; e

c Per la 1. par. perciò ancora la *c* CD sarà maggiore della AB.

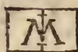
Quarto sia la AB eguale alla CD. Dico la E essere eguale alla F. Se ciò non è vero, la E sarà maggiore, ò minore della F. Adunque (per la seconda, e terza parte di questa proposizione) la AB sarà maggiore, ò minore della CD, il che è contra il supposto. Adunque la E è eguale alla F.

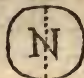












Quinto sia la AB maggiore della CD. Dico la E esser maggiore della F: se ciò non è vero, la E sarà eguale, ò minore della F. Onde (per la prima, e terza parte di questa) la AB sarà eguale, ò minore della CD, il che è contra l'ipotesi. Per la qualcosa la E sarà maggiore della F. Laonde &c.

COROLLARIO.

Quindi è, che se due quantità saranno le medesime parti di due quantità, saranno vicẽdeuolmente insieme maggiori, ò insieme minori, ouero insieme eguali.

Imperciochè se si porranno M, & N equimoltiplici delle medesime E, & F, saranno *d* la AB di M, e la CD di N le medesime parti: e *e* sì come la E è maggiore, ò minore, ò eguale di F, così ancora la M sarà maggiore, ò minore, ò eguale di

d *Dif. 6. di questo.*
e *Prop. 1 di questo.*

di N, e insiememente nel medesimo modo la AB sarà maggiore, ò minore, ò eguale della CD.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

Di due disegualі quantità, la maggiore à vna medesima hà maggiore proporzione, che non hà la minore. E la medesima alla minore auerà maggiore proporzione, che alla maggiore delle disegualі. *Eucl. 8. del lib. 5.*

Sieno due quãtità AB maggiore, C minore, e qualsiuoglia terza D del medesimo genere. Dico primamẽte che la AB alla D hà maggior proporzione, che la C alla medesima D. Dalla maggiore AB



s'intenda leuata via la FB eguale alla C, sarà AF l'auanzo, e *a* s'intenda la D segata in parti eguali, e successiuamente in altre parti equali, finche si ritroui la sua parte G, la quale sia minore di AF (il che è chiaro poterfi fare, benche molte volte ne' numeri si deuano vsare i rotti). Dipoi si pren- *a Dalla prop. 27. del 2.*

prenda la G vna volta, ò due, ò tre, e così procedendo tante volte, finche non ne risulti la N cõposta dalla G, la quale sia prossimamente maggiore della FB, cioè l'auanzo della stessa N sopra la FB, non sia maggiore d'vna sua particella G: ed essendo la G minore della AF, sarà l'auanzo della N sopra la FB minore della AF, e perciò la N sarà minore della AB, ma maggiore della FB, ouere maggiore della C, per esser la C, e la FB eguali. Si che saranno quattro quantità, la AB prima, la D seconda, la C terza, e la D quarta (poiche la D si prende, come seconda, e come quarta). Et è b la proposizione della quantità prima AB alla seconda D maggiore di quella commensurabile proporzione, che hà la N alla medesima D, auuenga, che la AB è maggiore della N; ed c è la proporzione della quantità terza C alla quarta D minore della medesima commensurabile proporzione, che hà la N alla D (per esser la C minore della N). Adunque d la quantità AB alla D hà maggiore proporzione, che nõ hà la C alla D.

A 2 F 8 B. C 8

N 9 G 1 $\frac{1}{2}$

D 6

b *Dif. 9. di questo.*

c *Dif. 9. di questo.*

d *Dif. 10. di questo.*

O

D

H

N

A B C

DIco secondariamente, che la medesima D alla minore C hà maggiore proporzione, che alla AB.

AB. Si faccia come sopra la N parti della D, che sia minore della AB, ma maggiore della C: e s'intēdano la O della AB, & la A della C esser le medesime parti, come la D è parti della N. E e perche la N è minore della AB, la D sarà minore della O; e parimente perche la N è maggiore della C, sarà la D maggiore della H. Per la qual cosa saranno quattro quantità, la prima D, la secōda C, la terza D (poiche la D si cōcepisce come prima, e come terza) e la quarta AB; f & è la proporzione della prima D alla seconda C maggiore di quella cōmensurabile proporzione, che ha la H alla C, ouero la O alla AB (auuenga, che H minore g di D stá a C come O a B) & la proporzione della terza D alla quarta AB è minore della mēdesima commēsurabile proporzione, h che hà la O alla AB (atteso che D è minore di O). Adunque la D alla C ha maggiore proporzione, i che non hà la D alla AB. Il che &c.

e Corol. de la p. 1. di questo.

f Diff. 9. di questo.

g Dif. 8. di questo.

h Dif. 9. di questo.

i Dif. 10. di questo.

PROPOSIZIONE III.

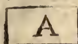
TEOREMA III.

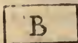
Le eguali quantità alla medesima hanno la medesima proporzione; e la medesima alle eguali.

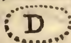
Euclid. 7. del lib. 5.

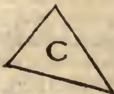
Sieno le quantità del medesimo genere A, B, e C, & la A sia eguale alla B. Dico la proporzione di A a C esser la stessa, che quella di B alla C, poiche, se ciò non è vero, *a* si ritrouarà qualche

a Ass. 3. di questo.









che altra quantita in natura maggiore, ouero minore della A, la quale alla C abbia la medesima proporzione, che ha la B alla medesima C. S'intenda ella essere, ouero chiamarsi D. E perche la D, e la A si pongono diseguali, & è la B eguale alla A. Adunque *b* la D è maggiore, ò minore della B; e perciò la D alla C auera maggiore, ò minore proporzione, che nõ hà la B alla medesima C, che è impossibile; poiche la D alla C fù posta come la B alla medesima C. Non altra quantita adunque maggiore, ò minore della A starà alla C, come la B alla C; e perciò la medesima A alla C starà come la B alla C.

b *prop. 2. di questo.*

A 25. B 25.

D.....

C 47.

Dico secondariamẽte la C auere la medesima proporzione alla A come alla B. *c* Poiche, se ciò non è vero, quella proporzione, che ha la C alla B, auerà la C a qualche quantità D altra di A. E perche la D, e la A si concedono diseguali, & è B eguale ad A; adunque D è maggiore, ò minore di B, e per questo *d* C a B auerà maggior proporzione, ò minore di quella, che abbia C a D, il che è impossibile; poiche C a B, & a D fù posto

c *Ass. 2. di questo.*

d *prop. 2. di questo.*

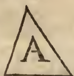
auer

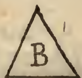
auer la medesima proporzione. Nõ hà adunque C alla maggiore, ò minore di A la medesima proporzione, che C a B, e perciò C ad A hà la medesima proporzione, che a B. Per lo che è chiaro &c.

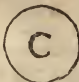
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV.

Quelle quantità, che hanno ad vna medesima quantità la medesima proporzione, sono eguali trà loro. E quelle alle quali la medesima quantità hà la proporzione medesime, sono eziandio eguali trà loro. *Eucl. 9. del 5.*







SIeno tre quantità A, B, e C, e nel primo luogo la A a C abbia la medesima proporzione, che B alla medesima C. Dico A esser' eguale a B. Poiche se A non è eguale a B le sarà maggiore, ò minore. Adunque *a* A a C auerà maggiore, ò minor proporzione di B alla medesima C, che è contra il supposto. Adunque A non è maggiore, ò minore di B; si che le sarà eguale. *a prop. 2. di questo.*

Abbia nel secondo luogo la medesima C ad A la medesima proporzione, che a B. Dico parimente A essere eguale a B. Poiche se A non è egua-

eguale a B, sarà maggiore, ò minore di lei. Laonde auerà la medesima *b* C ad A minore, ò maggiore proporzione, che a B: il che è contra l'ipotesi. Non è adunque la A maggiore, ò minore della B. Si che necessariamente le sarà eguale. Il che bisognaua &c.

b *prop. 2. di questo.*

PROPOSIZIONE V.

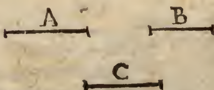
TEOREMA V.

Eucl. 10. del 5.

Delle quantità, che anno proporzione alla medesima quantità, quella che hà maggior proporzione, è maggiore. E quella alla quale la medesima quantità hà maggior proporzione è minore.

ABbia primamente A a C maggiore proporzione di B alla medesima C. Dico A esser maggiore di B. Poiche, se ciò non è vero, sarà A ò eguale, ò minore di B; e perciò A alla C auerà la *a* medesima, ò *b* minor proporzione di quella, che hà B alla medesima C. Le quali cose son false, e contra l'ipotesi. Non è adunque A eguale, ò minore di B. Onde è necessario la A esser maggiore della B.

a *prop. 3. di questo.*
b *prop. 2. di questo.*



Abbia secondariamente la medesima C a B maggiore proporzione, che ad A. Dico B esser mi-

minore di A. Impercioche se questo è falso, sarà B ò eguale, ò maggiore di A; e perciò C à B auerà la *c* medesima, ò *d* minor porzione, che ad A; le quali cose sono contra il supposto. Nõ è adunque B eguale, ò maggiore di A. Onde le sarà minore. Le quali cose bisogna dimostrare.

c *Prop. 3. di questo.*
d *prop. 2. di questo.*

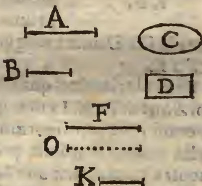
PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

Se due porporzioni saranno simili, & vna di loro sarà maggiore, ò minore di qualche terza proporzione, eziandio la rimanente sarà maggiore, ò minore della medesima.

Eucl. 13. del 5.

SIa A à B, come C à D: e qualsisia altra proporzione F à K. E primamente A à B abbia maggiore proporzione, che F à K. Dico che la C alla D auerà maggior proporzione, che la F alla K. Perche A à B hà maggior proporzione, che F à K. Adunque *a* la proporzione di A a B sarà maggiore d'vn'altra commensurabil proporzione (la quale ponghiamo essere quella di O a K). Ma la proporzione di F a K sarà non maggiore della medesima com-



a *Dif. 10. di questo.*

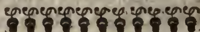
mensurabile proporzione della O a K. Dico adesso, che la proporzione di C a D è maggiore della commensurabil proporzione di O a K. Imperciochè, se è possibile, sia la proporzione di C a D non maggiore della medesima commensurabil proporzione di O a K: ed essendo la proporzione di A a B maggiore della medesima cōmensurabile proporzione di O a K. Adunque *b* la A a B hà maggiore proporzione, che la C a D, che è contra l'ipotesi; è impossibile adunque, che la proporzione di C a D sia non maggiore della proporzione di O a K, e però sarà maggiore di lei: & è la proporzione di F a K non maggiore della medesima commensurabile proporzione di O a K. Adunque *c* la C a D auerà maggior proporzione, che la F a K.

b *Dif.* 10. *di questo.*

c *Dif.* 10. *di questo.*

A 7.	C 14.
B 6.	D 12.
F 10.	
O 9.	
K 6.	

Secondariamēte, quando A a B hà minor proporzione di F a K. In somigliante maniera dimostrerassi, che la proporzione di C a D è minore della commensurabile proporzione di O a K, mentre la proporzione di F a K non è minore della medesima commensurabil proporzione di O a K. Onde la C a D auerà minor proporzione di quella, che hà la F a K. Le quali cose &c.



PRO-

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII.

Le proporzioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime ancora trà loro. *Eucl. 11. del 5.*

Sia la proporzione della quantità A a B, la medesima, che C a D, e parimēte E ad F sia come C a D. Dico essere A a B, come E ad F. Se questo è falso, la A a B, se è possibile, abbia maggior, ò minor proporzione di quella, che hà E ad F. E perche la proporzione di E ad F è stata supposta la medesima, che C a D; e la proporzione E ad F è stata conceßa maggiore, ò minore della proporzione di A a B. Adunque *a* C a D auerà maggiore, ò minor proporzione di A a B; il che è contra l'ipotesi. Atteso che C a D era come A a B. Adunque A a B non può auer maggiore, ò minore proporzione di E ad F; e perciò A a B sarà come E ad F. Il che si doueua dimostrare.

a prop. 6. di questo.

A, B, C, D, E, F

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII.

Se saranno quattro quantità proporzionali, e la quinta sarà maggiore della prima, e la sesta non maggiore della terza, auerà la quinta alla seconda maggiore proporzione, che la sesta alla quarta. E la quinta alla sesta auerà maggiore proporzione, che la prima alla terza. E se la quinta sarà maggiore della seconda, e la sesta non maggiore della quarta, aurà la prima alla quinta minor proporzione, che la terza alla sesta.

E ——— H ———
A ——— C ———
B ——— D ———

ABbia la A a B la proporzione medesima, che ha C si D, & E sia maggiore di A, & H non sia maggiore di C, cioè sia H eguale, ò minore di C. Dico primamente E a B auer maggior proporzione di H a D: perche *a* la maggiore E alla B hà maggior proporzione, che la minore A alla medesima B, & è C a D come A a B. Adunque *b* E a B hà proporzione maggiore di C a D. Ma C è eguale, ò maggiore di H. Adunque *c* C alla medesima D hà la medesima, ò *d* maggiore proporzione, che H a D. Laonde la *e* proporzione di E a B sarà per ancora maggiore della

a prop. 2. di questo.
b prop. 6. di questo.
c prop. 3. di questo.
d prop. 2. di questo.
e prop. 6. di questo.

la proporzione di H a D. E 7. H 27.

Dico nel secondo luogo, E ad H auer maggior proporzione, che A a C. Perche E è maggiore di A. Adunque *f* E ad H auerà maggior proporzione, che non ha A alla medesima H, & è H eguale, ò minore della C. Adunque la medesima A ad H hà *g* la medesima, ò *b* maggior proporzione che hà C. E perciò *i* E ad H auerà per ancora maggiore proporzione di quella, che hà la A a C.

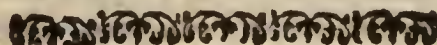
A 6.	C 30.
B 5.	D 25.

f prop. 2. di queste.
g prop. 3. di questo.
h prop. 22 di questo.
i prop. 6. di questo.

Sia nel terzo luogo E maggiore della seconda B delle proporzionali, & H non sia maggiore di D. Dico A ad E auer minor proporzione, che C ad H. Perche è maggiore di B, ma H non è maggiore di D. Adunque *k* la medesima A alla maggiore E auerà minor proporzione, che alla B minore; & è C a D come A a B. Adunque *l* A ad E hà minor proporzione, che C a D. Ma la medesima C alla non maggiore H hà la *m* medesima, ò *n* maggiore proporzione, che alla D: e però *o* la proporzione di A ad E sarà per ancora minore della proporzione di C ad H. Come era stato proposto.

A, B, E, C, D, H

k prop. 2. di questo.
l prop. 6. di questo.
m prop. 3. di questo.
n prop. 2. di questo.
o prop. 6. di questo.



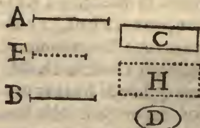
PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA IX.

Eucl. Corol. della prop. 4. del 5.

Se la prima quantità alla seconda auerà la medesima proporzione, che la terza alla quarta, sarà la seconda alla prima, come la quarta alla terza. Si chiami cotal sorte d'argomentare inuersione della proporzione.

SIa la A a B come la C a D. Dico la B ad A auere la medesima proporzione, che la D a C. Poiche se ciò non è vero, auerà B ad A maggiore, ò minor proporzione, che non hà C a D. E se è possibile, sia nel primo luogo tal proporzione maggiore. Adunque *a* la proporzione di B ad A sarà maggiore, e la proporzione di D a C non sarà maggiore della medesima proporzione commensurabile (la quale ponghiamo essere quella, che hà la quantità E ad A, & H a C) e perciò B sarà maggiore di E, ma D non sarà maggiore di H. E perche E ad A, & H a C sono nella medesima proporzione commensurabile. Adunque *b* E di A; & H di C saranno ò equimoltiplici, ò la medesima parte, ò le medesime parti, e *c* per il contrario A di E, e C di H saranno la medesima par-



a Dif. 10. di questo.

b Dif. 8. di questo.

c Dif 4. e 5. di questo.

parte, ò equimoltiplici, ò le medesime parti; e perciò *d* A ad E, e C ad H saranno nella medesima proporzione; & è B maggiore di E, e D non maggiore di H; adunque *e* A a B ha minor proporzione di quella, che abbia C a D, il che è impossibile, perche fù supposta la proporzione di A a B la stessa di quella di C a D. Per la qual cosa B ad A non auerà maggiore proporzione, che abbia D a C. Si dimostrerà similmente, che la D alla C non ha maggiore proporzione, che B ad A, perciò ne anche B ad A auerà minor proporzione, che la D alla C. Laonde B ad A sarà come D a C. Il che doueua dimostrarsi.

d Dif. 8. di questo.
e prop. 8. di questo.
f Diff. 11. di questo.

COROLLARIO.

Da questa dimostrazione si raccoglie, che se la prima auerà alla seconda maggior proporzione, che la terza alla quarta, inuertendo la seconda alla prima, auerà minor proporzione, che la quarta alla terza. Auuengache dall'essersi posta la proporzione di B ad A maggiore, che quella di D alla C, ne segui, che la proporzione di A a B fusse minore della proporzione di C a D.

Di Pappo Alessand. prop. 7. del lib. 1.

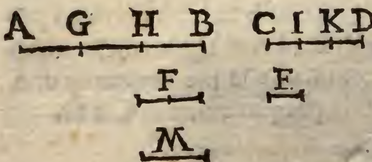


PROPOSIZIONE X.

TEOREMA X.

Se di quattro quantità del medeſimo genere, le due antecedenti ſaranno equimoltiplici delle due conſeguenti, e l'antecedente ſarà moltiplice dell'antecedente ſolamente, ouero la conſeguente della conſeguente; ſaranno vicendeuolmente proporzionali.

Sieno quattro quãtità del medeſimo genere, & AB della E, come anche la CD della F ſiano equimoltiplici; e prima ſia E moltiplice di F. Dico la AB a CD eſſere come E ad F. Perche le AB, e CD ſono equimoltiplici di E, & F, diuiſe le
a *Dif. 5.* antecedenti nelle ſue parti, ſaranno in AB *a* tan-
di queſto. te parti AG, GH, & HB ciaſcheduna eguale ad E, quante in CD ſono le parti CI, IK, e KD, ciaſcheduna eguale ad F; e perciò *b*
b *prop. 3.* quale parte è la
di queſto. F di E, la medeſima parte ſarãno CI di GA, & IK di GH, e KD



di queſto. di HB. Adunque *c* quante volte fà meſtieri mol-
c *Dif. 4.* tiplicare la F, accioche ella diuenga eguale ad E, tante volte fà meſtieri moltiplicare CI, perche ſia eguale alla AG, e tante volte la IK ſi dee moltiplicare, per farſi eguale alla GH, e ſimilmente

la

la KB tante volte si hà da moltiplicare, per essere eguale alla HB; e così le altre parti, se più ve ne saranno, le quali tante sono in CD, quante in AB. Adunque quante volte la F si dee moltiplicare per diuenir eguale ad E, tante volte le CI, IK, KD, cioè la stessa CD si hà da moltiplicare per diuenir eguale ad AG, GH, HB, ouero alla stessa AB. E per questo la CD tante volte misura AB, quante volte la F misura la E, e *d* perciò tanto la AB è moltiplice della CD, quanto la E della F. Come &c.

d Dif. 3. di questo

Secondariamente, poste le medesime cose, sia AB moltiplice di CD. Dico che E ad F sarà come AB alla CD. Si faccia la M tanto moltiplice della F, quanto la AB della CD; & è la parte CD moltiplice della F. Adunque *e* AB ad M è come CD ad F. Ma era come la CD alla F, così la AB alla E. Adunque *f* la medesima AB alle due M, & E hà la medesima proporzione, e perciò *g* E, & M sono eguali tra loro: onde *h* saranno equimoltiplici la AB della CD, e la M, ò pure la E della F. Per la qual cosa &c.

e Dalla 1. parte di questa prop.
f prop. 7. di questo.
g prop. 4. di questo.
h prop. 3. di questo.



PRO-

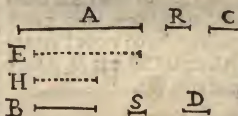
PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA XI.

Eucl. 15. del lib. 5.

Le parti anno la medeſima proporzione, che le loro equimoltiplici, eſſendo del medeſimo genere.

SIa tanto moltiplice la A di B, quanto la C di D, e del medeſimo genere. Dico la A a C eſſer come B a D. Perche ſe queſto è falſo, abbia primamente ſe può eſſere la A a C maggiore proporzione di B a D. Adũque *a* la proporzione di A a C ſarà maggiore, e la ꝓporzione di B a D non ſarà maggiore della medeſima proporzione commenſurabile (la quale s'intenda auere la E a C, & H a D, e le loro comuni miſure ſiero le R, & S). Laonde la A ſarà maggiore di E, ma la B non ſarà maggiore di H. E perche le C, D ſono eguali, ò equimoltiplici delle R, & S (miſurando queſte egualmente quelle) & è C moltiplice di D. Adunque *b* la R di S, e la C di D ſaranno equimoltiplici. Di più perche E, & H ſono eguali, ouero equimoltiplici di R, & S, & R è moltiplice di S. Adunque *c* la E è così moltiplice del-



a Dif. 10. di queſto.

b prop. 10 di queſto.

la

la H, come R di S, ò pure come C è moltiplice di D; ma la A della B è tanto moltiplice, quanto C della D; adunque la E della H è tanto moltiplice, come la A è moltiplice della B, e *d* perciò, si come la E è minore della A, così la H è minore della B; e pure la stessa H fù concessa non minore della B, il che è impossibile. Non ha adunque la A alla C maggiore proporzione della B alla D. Con vn simigliante discorso si dimostrerà la A alla C non hauere minor proporzione della B alla D. Laonde *e* la A alla C sarà come la B alla D. Il che doueua prouarsi.

d *prop.* 1. *di questo.*

e *Dif.* 12. *di questo.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA XII.

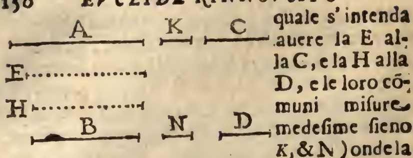
Se quattro quantità del medesimo genere saranno proporzionali, saranno ancora vicendeuolmente proporzionali. E si chiami cotal forma di argomentare permutazione di proporzione.

Eucl. 16. *del lib.* 5.

Sia la A alla B, come la C alla D, e sieno tutte del medesimo genere. Dico la A alla C essere come la B alla D. Che se ciò non è vero, la A alla C auerà maggiore, ò minor proporzione della B alla D. E sia nel primo luogo, se è possibile tal proporzione maggiore. Adũque *a* la proporzione della A alla C sarà maggiore, e la proporzione della B alla D nõ sarà maggiore d'vna medesima proporzione commensurabile (la-

a *Dif.* 10. *di questo.*

qua-



quale s' intenda auere la E alla C, e la H alla D, e le loro cōmuni misure medesime sieno K, & N) onde la A sarà maggiore della E, ma la B non sarà maggiore della H: ed essendo la E alla C, come la H alla D. Adunque *b* la proporzione della A alla B sarà maggiore di quella della E alla H: ma *c* la K alla N è come la E alla H (essendo elle medesime misure di queste). Adunque *d* la A alla B hà maggiore proporzione, che la K alla N: ma *e* la C alla D stà come la K alla N (essendo queste le medesime misure di quelle). Adunque la *f* A alla B hà maggior proporzione, che la C alla D, il che è impossibile; attesoche la A alla B fù supposta come la C alla D. Per la qual cosa la A alla C nō aurà maggior proporzione della B alla D.

b prop. 8. di questo.
c prop. 11. di questo.
d prop. 6. di questo.
e prop. 11. di questo.
f prop. 6. di questo.

Similmente si dimostrerà, che la A alla C ne anche hà minor proporzione, che la B alla D. Laonde la A alla C aurà la medesima proporzione, che hà la B alla D. Come era stato proposto. Si chiami questo modo di argomentare permutazione di proporzione.

COROLLARIO.

Di Pappo la 17. del 7.

Si caua da questa dimostrazione, che se la prima quantità alla seconda aurà maggior proporzione, che non hà la terza alla quarta, permutando

tando la prima alla terza, aurà maggior proporzione della seconda alla quarta. Impercioche dall'esserſi poſto, che la A alla C aueua maggior proporzione, che la B alla D, ne conſeguirà permutando, che la A alla B aueſſe maggior proporzione, che la C alla D.

PROPOSIZIONE XIII.

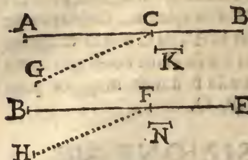
TEOREMA XIII.

Se quattro quantità ſaranno proporzionali, le differenze de' termini à i conſeguenti, aueranno la ſteſſa proporzione; e per il contrario. *Eucl. 17. del 5.*

SIa la AB alla BC, come la DE alla EF. Dico che la AC differenza de' primi termini al cõſeguente CB ſtà come la DF differenza de' ſecondi termini all'altro conſeguente EF. Perche, ſe ciò non è vero, la AC alla CB aurà maggiore, ò minor proporzione di quella, c'hà la DF alla FE. E ſia prima la proporzione maggiore. Adunque *a* la proporzione della AC alla CB ſarà maggiore; ma la proporzione di DF ad FE nõ ſarà maggiore d'vna medeſima proporzione commenſurabile (la quale ponghiamo, che abbia la GC a CB, e HF ad FE, e le loro communi miſure medeſime ſiano K, & N). Per la qual coſa AC ſarà maggiore di GC, ma la DF non ſarà maggiore di HF. E perche le GC, & HF ſono egualmente miſurate dalle K, & N. Adunque *b* tante parti vi ſa-

a *Dif. 10. di queſto.*

b *Dif. 4. di queſto.*



saranno in GC ciascuna eguale a K, quante ve ne sono in HF ciascuna eguale ad N. Di più perche le stesse K, N misurano egualmente le

c *Dif. 4. di questo.* CB, & FE, tante *c* parti vi saranno in CB ciascuna eguale a K, quante ve ne sono in FE ciascuna eguale ad N. Per la qual cosa se alle eguali moltitudini di parti contenute in GC, & HF, si aggiungano le eguali moltitudini delle parti contenute in CB, & FE, saranno in GB tante parti eguali a K, quãte ve ne sono in HE ciascuna eguale ad N. E però la GB *d* sarà le medesime parti

d *Dif. 6. di questo.* di BC, che è la HE della EF. E perche si concedette AC maggiore di GC aggiunta communemente la CB, sarà anche AB maggiore di GB. E perche la DF non era maggiore di HF, aggiunta communemente la FE, sarà la DE non maggiore di HE. E perche *e* la GB alla BC stá come

e *Dif. 8. di questo* HE ad EF, ed è la AB maggiore della GB, ma

f *prop. 8. di questo.* la DE non è maggiore di HE; adunque *f* la AB alla BC aurà maggiore proporzione, che non hà la DE alla EF; la qual cosa è impossibile. Poiche per l'ippotesi la AB alla BC staua come la DE alla EF. Non aurà dunque la AC alla CB maggiore proporzione di quella, che hà la DF alla FE. Similmente si prouarà che la AC alla CB ne

an-

anche hà minor proporzione di quella, che si abbia la DF alla FE. Per la qual cosa la g AC alla CB stà come la DF alla FE. Il che si doueua nel primo luogo prouare. E poiche la AC a CB si è dimostrato esser come DF ad FE, adunque h inuertendo la BC alla CA, starà come la EF alla FD. Il che si doueua &c.

g Dif. 12. di questo.

h prop. 9. di questo.

COROLLARIO.

Quinci è, che se la prima alla seconda auerà maggiore proporzione, che la terza alla quarta, la somma della prima, e della seconda auerà alla seconda maggiore proporzione, che la somma della terza, e della quarta alla quarta. Auuenga che dall'esser posta la proporzione della AC alla CB maggiore di quella di DF alla FE, dimostrotsi la AB alla BC auere maggiore proporzione della DF alla EF.

Pappo 3. del 7.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA XIV.

Se quattro quantità saranno proporzionali, le somme de' termini à conseguenti, ouero à gl'antecedenti saranno ancor' esse proporzionali, e proporzionali saranno à gli antecedenti le differenze de' termini.

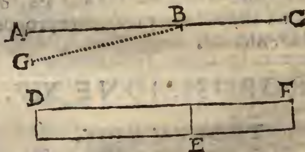
E per il contrario.

Eucl. 18. del 5.

SIa AB a BC, come DE ad EF. Dico che le somme de' termini alle conseguenti son propor-

zio-

zionali, cioè come AC a CB, così stà DF ad FE. Se questo non è verò, aurà AC a CB maggiore, ò minor proportione, che DF ad FE. E sia prima
a Dalle prop. 5. e 6 di questo. la proporzione maggiore. Adunque a qualche quantità minore di AC, quale pongasi esser GC aurà alla CB la stessa proporzione, che DF ad FE, e b comparendo le differenze a i termini con-
b prop. 13 di questo. seguenti, cioè GB a BC starà come DE ad EF, ma la AB è maggiore della GB (imperòche AC era maggiore di GC, e si toglie communemente la
c prop. 2. di questo. BC); adunque c la AB alla BC aurà maggiore proporzione della GB alla medesima BC. Ma
d prop. 6. di questo. era GB a BC, come DE ad EF, d però AB a BC aurà maggior proporzione, che DE ad EF, il che

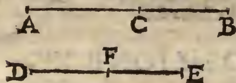


è falso, essendosi supposta la AB alla BC, come la DE alla EF. Non aurà adunque la AC alla CB maggiore proporzione, che la DF alla FE. Similmente si mostrerà, che la AC alla CB non hà mi-
e prop. 12 di questo. nor proporzione, che la DF alla FE. Per e la qual cosa AC a CB starà come DF ad FE. Et dop-
f prop. 9. di questo. po f interuenendo BC a CA, starà come EF ad FD;

FD; adunque è vera la prima parte, e la sua conuersa.

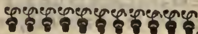
Nel secondo luogo dico, che le somme de' termini a gli antecedenti sono proporzionali, cioè AC ad AB, starà come DF a DE. Perche per l'ippotesi AB a BC, sta come DE ad EF; adunque *g* inuertendo CB a BA, stà come FE ad EB, e *h* comparando le somme de' termini a i conseguenti, starà la CA alla AB, come la FD alla DE: e poi *i* inuertendo AB alla CA, stà come ED a DF, e però è vera la seconda parte è la sua conuersa.

g prop. 9. di questo.
h Per la 1. parte di questa prop.
i prop. 9. di questo.



Terzo sieno i medesimi termini proporzionali AB a BC, come DE ad EF. Dico che le antecedẽti alle differenze de' termini saranno proporzionali, cioè AB ad AC starà come DE a DF, & per il cõtrario CA ad AB, starà come FD a DE. Perche AB a BC, stà come DE ad EF; adunque *k* cõparando le differenze de' termini a i cõseguenti, sarà AC a CB, come DF ad FE, & *l* inuertendo BC a CA, come EF ad FD, e *m* comparando le somme de' termini a i conseguenti, sarà BA ad AC, come ED a DF; e finalmente *n* inuertendo AC ad AB, sarà come DF ad FE; le quali cose si doueuano dimostrare.

k prop. 15 di questo.
l prop. 9. di questo.
m Part. 1 di questa prop.
n prop. 9. di questo.



COROLLARIO.

Del Capano 29. del 5.

Cauasi dalla prima parte di questa proposizione, che se la prima alla seconda aurà maggior proporzione, che la terza alla quarta, la differenza de'termini primo, e secondo al secondo, aurà maggior proporzione, che la differenza de' termini terzo, e quarto al quarto termine. Poiche dall' esserſi posta la proporzione di AC a CB maggiore che la proporzione di DF a FE, si dimostrò che la AB alla BC hauea maggior proporzione, che la DE alla EF.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XV.

Eucl. 19. & 12. del lib. 5.

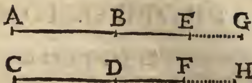
Se quattro quantità del medesimo genere saranno proporzionali, le somme, ò le differenze degli Omologhi termini saranno nella stessa proporzione; e per il contrario.

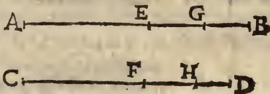
Sian prima quattro termini proporzionali AB a CD, come BE a DF. Dico che le somme degli Omologhi nella prima figura, e le differenze nella seconda, cioè la AE alla CF auerà la stessa proporzione, che hà la AB alla CD. Perche la AB alla CD, stà come la BE alla DF. Adunque *a* permutando la AB alla BE, starà come la CD alla DF, e *b* comparando le somme de'ter-

a prop. 12 di questo.
b prop. 14 di questo.

mini

mini nel primo caso, e *c* le differenze nel secondo alle cōseguenti sara AE alla EB, come la CF alla FD, e *d* permutando di nuouo la AE alla CF, aurà la stessa proporzione, che la BE alla DF, ò pure che la AB alla CD Sieno in oltre EG ad FH, come BE a DF, ò pure come AB a CD. Dico parimente che le somme, ò le differenze di tutti gli Omologhi anno la medesima proporzione, cioè AG a CH esser come AB a CD; perche fù dimostrata la AE alla CF esser come EB ad FD, ma è EG ad FH, come BE a DF. *e* Adunque AE a CF, stà come EG ad FH: la onde (per la prima parte di questa proposizione) la AG alla CH sarà come EG ad FH, ò pure come AE a CF, ò veramente come AB a CD. Le quali cose si doueuano dimostrare.





c *prop.* 13 *di questo.*

d *prop.* 12 *di questo.*

e *prop.* 7. *di questo.*



PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA XVI.

Eucl. 25. del 5.

Se quattro quantità del medesimo genere saranno proporzionali, la massima, e la minima saranno maggiori delle due rimanenti.

A F C B D H

SIeno le quattro quantità del medesimo genere proporzionali la A alla B nella medesima proporzione, che la C alla D, e sia la A massima di tutte, e la D minima. Dico la A, e la D insieme prese esser maggiori della B, & C insieme. Si ponga la F eguale all'auanzo della massima A sopra la C, e la H sia eguale all'eccesso della B, sopra la minima D. E'manifesto, che la C, e la F insieme sono eguali alla A, e che la D, e la H insieme sono eguali alla B. E perche come stà A a B, ouero come il tutto FC sta al tutto HD, così stà C a D. Adunque *a* le differenze degli Omologhi saranno proporzionali, cioè l'auanzo F all'auanzo H starà come FC ad HD, cioè come A a B. Ma perche A, come massima, è maggiore di B, ancora F sarà maggiore di H (perche se non fosse maggiore, A a B *b* auerebbe maggior proporzione, che F ad H, il che è falso, atteso che A, B, F, H furono dimostrate proporzionali) se adunque

a *prop. 15 di questa.*

b *Ass. 6. di questo.*

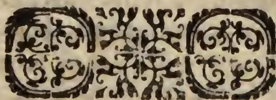
que

que alle diseguali F, & H si aggiugnerà communemente la somma delle C, & D, la somma delle quantità F, C, & D *c* sarà maggiore della somma delle quantità H, D, e C: ma F, C, e D sono eguali ad A, e D (essendosi FC mostrata eguale ad A, e D commune) e per la medesima ragione H, D, e C sono eguali a B, e C. Adunque la massima A insieme con la minima D, son maggiori, che la B, e C insieme prese. Il che bisognaua &c. c *Ass.* 4. *del* 1.

COROLLARIO.

Di quì si raccoglie, che se quattro quantità son proporzionali saranno direttamente, e vicendeuolmente insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori. *Eucl.* 14. *del* 5.

Impercioche A a B fù dimostrata come F a H. E si prouò, che quando *d* A è maggiore di B, non è la F eguale, ò minore di H: e per il contrario. Adunque l'antecedenti A, & F saranno insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori delle conseguenti B, & H. Di più, *e* perche inuertendo A ad F, stà come B ad H. Adunque A, e B sono insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori di F, & H. d *prop.* 16 *di questo.* e *prop.* 12 *di questo.*

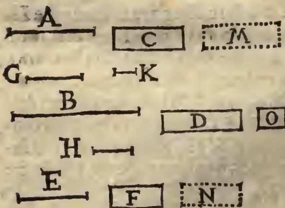


PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XVII.

Se à due ſimili proporzioni commenſurabili ſi continueranno due altre ſimili proporzioni commenſurabili, i primi termini à gl' vltimi auranno la medeſima commenſurabile proporzione.

ABbia A a B la medeſima commenſurabile proporzione, che hà C a D, e B ad E ſtia nella medeſima cõmenſurabile proporzione, che hà D ad F. Dico che A ad E hà la medeſima commenſurabile proporzione, che hà C ad F. Sia G miſura commune delle due quantità A, e B, & H ſia commune miſura delle due B, E: e s'intenda la quantità *a* K, la qual miſuri tãte volte G, quãte H miſura la B. Adunque *b* permutando K, miſurerà tante volte H, quante volte G miſura la B; & miſurando H le B, & E, ancora la *c* K miſura le ſteſſe B, & E. Di più perche K miſura G, e G miſura le A, B. Adunque *d* la medeſima K miſura non ſolamente E, ma ancora



a *Aſſ.* 3. *di queſto.*

b *prop.* 10 *di queſto.*

c *Aſſ.* 1. *di queſto.*

d *Aſſ.* 1. *di queſto.*

ra

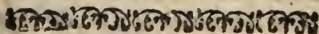
ra A, e B. Di poi s'intenda la O, e che tante volte misuri D, quante volte K misura B, & M stia ad O, come A a K, e parimente N stia ad O, come E a K. E perche A, & M sono equimoltiplici delle K, & O, & sono eziandio E, & N equimoltiplici delle medesime K, & O. Adunque *f* A è le medesime parti di E, che la M dell'altra N; e sono B, e D equimoltiplici delle medesime K, & O. Adunque *g* A, & M sono le medesime parti delle B, e D. Ma C a D staua come A a B. Adunque *h* C, & M sono le medesime parti della medesima D; e *i* perciò C è eguale ad M. Nella medesima guisa si dimostrerà F eguale ad N. Laonde *k* C ad F, starà come M ad N. E dimostrossi A ad E esser come M ad N. Adunque *l* A ad E starà come C ad F; il che bisognaua prouare.

e *Ass. 3. di questo.* f *Dif. 6. di questo.* g *Dif. 6. di questo.* h *prop. 7. di questo.* i *prop. 4. di questo.* k *prop. 3. di questo.* l *prop. 7. di questo.*

COROLLARIO.

Si caua dalla dimostrazione di questa proposizione, che due quantità, le quali sono commensurabili ad vna terza, sono ancora commensurabili trà loro. *Eucl. 12. del 10.*

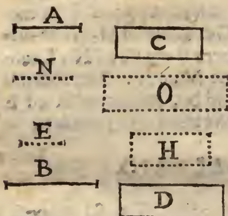
Imperòche A, & E si posero commensurabili alla medesima B; perche G era misura commune delle due A, e B, e similmente H era misura commune delle due B, & E; e *m* dimostrossi che la K misuraua ambedue le estreme A, & E. m *pro. 17. di questo.*



PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XVIII.

Se quattro quantità saranno proporzionali, le antecedenti saranno eziandio proporzionali à due quantità, che abbiano alle medesime conseguenti la stessa proporzione commensurabile.



Abbia A a B la medesima proporzione, che C a D, & abbia *E* a B la medesima proporzione commensurabile, che há H a D. Dico, che A ad *E* stà come C ad H. Poiche, se ciò non è verò, auerá A ad *E* maggiore, ò minor proporzione, che C ad H: e sia prima la proporzione maggiore, se è possibile. Adunque *a* la proporzione di A ad *E* sarà maggiore, mà la proporzione di C ad H non sarà maggiore della medesima proporzione commensurabile (la quale abbiano N ad *E*, & O ad H) e perciò A sarà maggiore di N, ma C non sarà maggiore di O. *E* perche N ad *E* hà la stessa proporzione commensurabile, che O ad H, e parimente *E* a B, & H a D hanno la medesima proporzione commensurabile.

a *Dif* 10. *di questo.*

Adun-

Adunque *b* N a B ha la medesima proporzione commensurabile che hà O a D; & è A maggiore di N, e C non maggiore di O. Adunque *c* A a B aurà maggior proporzione di C a D, il che è impossibile, poiche A,B,C, D furono supposte proporzionali. Non auerà adunque A ad *E* proporzione maggiore di G ad H. Si dimostrerà similmente, che neanche A ad *E* hà minor proporzione di C ad H. Laonde *d* A ad *E* sta come C ad H. Il che auea a prouarsi &c.

b *prop. 17 di questo.*
c *prop. 8. di questo.*
d *Dif. 12 di questo.*

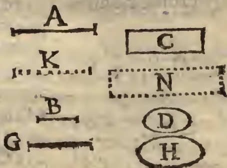
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XIX.

Se à simili proporzioni con ordinata serie si aggiugneranno pari moltitudini di proporzioni simili: i termini primi à gl'vltimi haueranno la medesima proporzione. Si chiami cotal forma di argomentare Composizione ordinata di proporzioni.

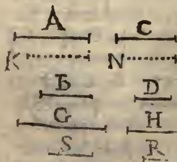
Eucl. 22. del 5.

Sia la proporzione di A alla B simile, ouero la medesima di quella della quantità C alla D, e a queste s'aggiũgano altre proporzioni simili con ordine tale, che la B a G stia come D



ad H. Si dee dimostrare, che la proporzione di A a G è la medesima, che quella di C ad H. Poiche, se ciò non è vero, A a G auerà maggiore, ò minor proporzione di quella, che hà C ad H: E se è possibile sia la proporzione maggiore. Adunque la proporzione *a* A a G sarà maggiore, e la proporzione di C ad H non sarà maggiore della medesima proporzione commensurabile (la quale abbiano K a G, & N a H) e perciò A sarà maggiore di K, e C non sarà maggiore di N. Perche B a G stà come D ad H, e K a G hà la medesima proporzione cõmensurabile, che N ad H. Adunque *b* come B a K così stà D ad N, & *c* inuertendo K a B starà come N a D, & è A maggiore di K, e C non maggiore di N. Adunque *d* A a B hà maggior proporzione di C a D; il che non può essere. Auuenga che A a B fù supposta come C a D. Non hà adunque A a G maggior proporzione di C ad H. Dimostrerassi similmente, che A a G neanche hà minor proporzione di C ad H. E perciò *e* A a G starà come C ad H. E se di nuouo altre proporzioni simili G ad S, & H ad R si aggiugneranno successiuamente, cõsiderando mai sempre nel medesimo modo le quantità A, G, S, e l'altre tre C, H, R, le cõposte proporzioni A ad S, e C ad R, si dimostreranno, come sopra, essere medesime, come è stato

a *Dif.* 10. *di questo.*
b *prop.* 18 *di questo.*
c *prop.* 9. *di questo.*
d *prop.* 8. *di questo.*
e *Dif.* 12. *di questo.*



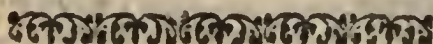
to proposto. Si chiami cotal forma di argomentare Composizione ordinata delle proporzioni.

E se per auuentura le componenti proporzioni continuate A a B, B a G, e G ad S, saranno simili, ò medesime tra loro. Si chiami la proporzione della A alla G dupplicata della proporzione della A alla B, ouero della B alla G, e la proporzione della A alla S, si chiami triplicata d'vna delle proporzioni di A alla B, e sesquialtera della proporzione della A alla G, e così successiuamente. Ma se le proporzioni continuate della A alla B, e della B alla G, e della G alla S nõ saranno le medesime tra loro, si chiamerà assolutamẽte la proporzione della A alla S composta dalle tramezze proporzioni della A alla B, della B alla G, e della G alla S.

COROLLARIO I.

Se quattro quantità saranno proporzionali, qualunque equimoltiplici delle antecedẽti, a qualunque equimoltiplici delle conseguenti saranno proporzionali. *Euclid. 4. del 5.*

Imperòche se B a G stà come D ad H, & a queste si aggiungano altre proporzioni con metodo ordinato, facendo che A sia così moltiplice di B, come C di D, e G sia la medesima parte di S, & H di R. Parimente *f* A ad S starà come C ad R. *f prop. 19. di questo.*



CO-

COROLLARIO II.

Da questa dimostrazione si caua, che se si disporranno con ordine continuato pari moltitudini di proporzioni, quella che è composta dalle maggiori, sarà maggiore di quella che è composta dalle minori.

Auuengache g la proporzione di A a B viene cōposta dalle proporzioni di A a G, e di G a B, e la proporzione di C a D si cōpose delle proporzioni di C ad H, e di H a D; e la proporzione di A a G fù concessa maggiore della proporzione di C ad H, *h* & inuertendo G a B sta come H a D; e dimostrossi la proporzione di A a B maggiore di quella, che ha C a D.

g prop. 19 di questo.

h *prop. 9. di questo.*

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XX.

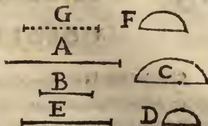
Eucl. 23. del 5.

Se à proporzioni simili vi se ne aggiugneranno altre simili proporzioni con serie non ordinata; i termini supremi à gl' infimi saranno eziandio proporzionali. E si chiami questa sorte di argomentare Composizione perturbata di proporzioni.

STia la quantità A alla B come la C alla D; e a queste proporzioni simili, vi se ne aggiungano ancora due altre tra loro simili, ma con vn' ordine perturbato, in maniera, che B ad E stia

come

come F a C. Dico che la proporzione di A ad E, composta dalle proporzioni di A a B, e di B ad E, è la medesima di quella di F a D; la quale è composta delle stesse proporzioni di C a D, e di F a C. E perche qual proporzione hà B ad E, tale l'aurà *a* qualche altra quantità ad A, benche ella non sia nota, tuttauolta perche è vero, che ella si troua in natura, supponghiamo che sia G, ouero si chiami G. E perche G ad A stà come B ad E, ma F a C stà come la medesima B alla medesima E. Adunque *b* G ad A stà come F a C, & A a B stà come C a D, e però per *c* l'ordinata composizione G a B starà come F a D. Dipoi perche come G ad A, così è B ad E; adunque *d* permutando come G a B, così stà A ad E, ma come G a B così dimostrossi F a D; Adunque come *e* A ad E, così starà F a D. Se di nuouo altre proporzioni simili E ad H, e K ad F, con la medesima serie non ordinata si aggiugneranno, considerando mai sempre nella medesima maniera tre quantità A, E, & H, e tre altre K, F, e D, le composte proporzioni di A ad H, e di K a D si dimostreranno, come sopra, essere simili trà loro. Il che bisognaua &c.



a *Ass. 3. di questo.*

b *prop. 7. di questo.*

c *prop. 19 di questo.*

d *prop. 12. di questo.*

e *prop. 7. di questo.*

A 6	K 24
B 3	F 12
E 4	C 16
H 2	D 8

COROLLARIO.

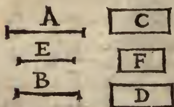
f Corol. 2. della pr. 19. di questo.

Similmẽte la proporzione composta di maggiori proporzioni con ordine perturbato, sarà maggiore di quella, che d'altre, e tante minori proporzioni è composta. Imperciòche le proporzioni composte, ò ordinatamente, ò perturbatamente sono le medesime trà loro: e però la *f* proporzione ordinata se sarà maggiore di qualche altra, ancora la perturbata sarà maggiore di quella stessa proporzione.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XXI.

Se da proporzioni simili si sottrranno, ò ordinatamente, ò perturbatamente proporzioni simili; le proporzioni rimanenti saranno ancora simili.



Sia la proporzione di qualsiuoglia quãtità A a B, come C a D, e da queste proporzioni simili, ouero medesime, si leuino via altre medesime proporzioni ordinatamente nel primo luogo, di modo che A stia ad E, come C ad F. Dico le rimanenti proporzioni di E a B, & F a D esser le medesime. Perche *a* inuertendo come E ad

a prop. 9. di questo.

ad A, così stà F a C, e come A a B, così era C a D. Adunque *b* componendo ordinatamente come E a B, così starà F a D.

b prop. 19 di questo.

Si leuino via perturbatamẽte, nel secondo luogo, le medesime, di modo che stia A ad E, come F a D. Dico le rimanenti proporzioni di E a B, e di C ad F essere le medesime. Perche *c* inuertendo come B ad A, così stà D a C, e come A ad E, così stà F a D; adunque *d* per la composizione perturbata come B ad E, così stà F a C, & inuertendo *e* come E a B, così stà C ad F. Il che bisognaua dimostrare.

A 8	C 4
E 4	F 6
B 6	D 3

c prop. 9. di questo.

d prop. 20 di questo.

e prop. 9. di questo.

COROLLARIO.

Dalle trè precedenti proposizioni si caua, che se alcuna proporzione sarà composta di altre proporzioni, ella eziandio è composta delle medesime proporzioni disposte in qualsiuoglia ordine.

Poiche se la proporzione di A a B frapposti i termini C, D, & E sarà cõposta delle proporzioni, α, β, γ, λ, la medesima sarà composta delle medesime proporzioni, ma con ordine perturbato β, α, λ, γ

	A		A
C	α	F	β
D	β	G	α
E	γ	H	λ
B	λ	B	γ

frap-

frapposti altri termini F, G, & H. Auuengachè *f* come stà A a D così stà A a G: e di nuouo *g* come stà D a B, così stà G a B. Adunque *h* A a B stà come A a B di quell'altro ordine.

f prop. 20. di questo. *g prop. 20 di questo.* *h prop. 19 di questo.*

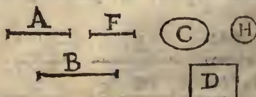
PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XXII.

Eucl. 24. del 5.

Se due quantità aueranno la medesima proporzione à due conseguenti, & alle stesse due altri antecedenti sian proporzionali: le somme de gl'antecedenti non Omologhi alle medesime conseguenti, aueranno ancor' esse la medesima proporzione.

STia A a B come C a D, & F alla medesima B stia come H alla medesima D. Dico che le due antecedenti A, & F insieme anno a B la medesima proporzione, che le due C, & H insieme a D. Perche come stà F a B, così stà H a D. Adunque *a* inuertendo come B ad F, così stà D ad H. Ma A a B stà come C a D, e però *b* ordinatamente componendo come stà A ad F, così starà C ad H; e *c* comparando le somme de' termini a i conseguenti A, & F ad F staranno come C, & H ad H. Ma F a B staua come H a D. Adunque di nuouo *d* per la ordinata composizione AF insieme staran-



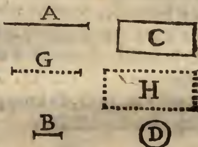
a prop. 9. di questo. *b prop. 19 di questo.* *c prop. 14 di questo.* *d prop. 19 di questo.*

ranno a B, come H C insieme prese a D. Il che bisognaua &c.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XXIII.

Se saranno quattro quantità di tal condizione, che prese quali si vogliano altre proporzionali commensurabilmente alle conseguenti siano insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori delle antedenti ordinatamente; quelle quattro quantità saranno proporzionali.

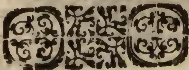


SIeno quattro quantità, la prima A, la seconda B, la terza C, e la quarta D, e di più la quinta G à B abbia la medesima proporzione commensurabile, che hà la sesta H alla D, e sieno le dette proporzioni commensurabili qualunque si vogliano delle infinite, che si possono assegnare; e ogni volta che la G è eguale alla prima A, parimente sia la H eguale alla terza C, e ogni volta che la G è minore di A, sia anche la H minore di C, e ogni volta che la G è maggiore di A, si ritroui sempre la H maggiore di C, e ciò mai sempre si verifichi in tutte le infinite proporzionalità commensurabili. Dico che la prima A alla se-

conda B hà la medesima proporzione, che la terza C alla quarta D. Se questo è falso la A alla B auerà maggiore, ò minor proporzione, che non hà la C alla D. E sia nel primo luogo la proporzione maggiore se è possibile. Adunque *a* la proporzione della A alla B sarà maggiore, e la proporzione della C alla D non sara maggiore della medesima proporzione commensurabile (la quale s'intenda, che abbia la G alla B, & la H alla D) & la A sara maggiore di G, e C non sarà maggiore di H. Laonde due quantità G, & H, che anno la medesima proporzione commensurabile alle due conseguenti B, e D, non saranno insieme minori delle antecedenti, il che è contra il supposto. Non hà adunque la A alla B maggior proporzione di C a D. Col medesimo discorso si dimostrerà la A alla B non auer minor proporzione di C a D. Adunque *b* le quattro quantità A, B, C, D sono proporzionali. Il che bisognaua dimostrare.

a Dif. 10. di questo.

b Dif. 12. di questo.



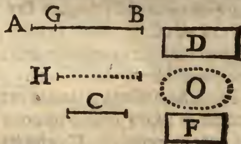
PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXIV.

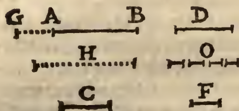
Se saranno quattro quantità di tal condizione, che prese due altre proporzionali alle conseguenti siano insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti, in maniera, che l'eccesso, ò il diffetto della prima sia minore di qualsiuoglia dato; saranno dette quantità proporzionali.

Sieno quatto quantità AB, C, D, F tali, che presene due altre H,& O proporzionali alle conseguenti C, & F sieno insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti AB, e D, di modo, che l'eccesso, ouero il difetto di H dalla prima AB sia minore di qualunque assegnabile quãtità delle infinite, che proporre si possono. Dico che AB a C hà la medesima proporzione, che ha D ad F. Perche qualsiuoglia quantità minore di AB, quale è la GB, è necessario, che



manchi da quella di qualche difetto, quale è AG; e si suppongono così la H minore della AB, come la O minore della D, di modo che il difetto

della H dalla prima AB sia minore di qualunque assegnabile quantità, adunque il difetto di H dalla prima AB potrà esser minore di AG; e perciò GB sarà minore di H, mentre D si suppone maggiore di O: Ma la H alla C stà come O ad F, *a* adūque la GB (cioè qualsiuoglia quantità minore di AB) auerà minor proporzione alla C, che non hà la D alla F. Si che nessuna quantità minore di AB auerà a C la medesima proporzione, che hà D ad F. Nel secondo luogo perche qualsiuoglia maggiore di AB, quale è GB, auanza quella di qualche eccesso GA. Et le H, & O si suppongono insieme maggiori delle antecedenti cō tal legge, che l'eccesso della H dalla prima AB sia minore di qualsiuoglia dato GA, perciò GB sarà maggiore della H, mentre D è minore della O; Et la H alla C sta come D ad F, *b* adunque GB (cioè qualunque maggiore della AB) aurà maggior proporzione alla C, che non l'ha la D alla F: Perilche nessuna quantità maggiore della AB, si come di sopra niuna minore auerà la medesima proporzione alla C, che hà la D ad F, & *c* si troua pure in natura quella quantità, che stà alla seconda C, come la terza D alla quarta F. Adunque la medesima AB alla C auerà la medesima proporzione, che hà la D ad F. Il che si era proposto &c.



a prop. 8. di questo.

b prop. 8. di questo.

c Ass. 3. di questo.

SCHO-

SCHOLIO.

Oltre à questi vi è vn'altro modo da conoscer le proporzionali molto vsato da Euclide, & Archimede, ed è questo. Se d' vna quantità, che auanzi la prima di vn' eccesso minore di qualunque assegnabile la proporzione, ch'ella hà alla seconda sia maggiore di vna data proporzione, e parimente d'vna quantità che manchi dalla prima di vn defetto minore di qualunque assegnabile la proporzione, ch'ella hà alla seconda, sia minore della stessa data proporzione, la prima alla seconda aurà la proporzion data. Perche si suppone l'eccesso, ò'l defetto dalla prima poter esser minor di qualunque assegnabile quantità, e qualsiuoglia quantità maggiore della prima l'auanza di qualche eccesso, il quale sarà minore di qualche altra quantità. Adunque qualsiuoglia quantità, cioè tutte le maggiori della prima aueranno maggior proporzione alla seconda, che non è la proporzion data; e però niuna quantità maggiore della prima, auerà alla seconda la stessa proporzione data. Similmente niuna quantità minor della prima aurà alla seconda la stessa proporzione data. Adunque necessariamente la stessa prima aurà alla seconda la stessa proporzione data.

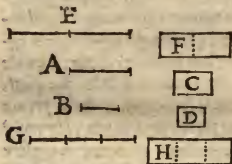


PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XXV.

Euclid.8. del 5.

Delle equimultiplici di due antecedenti, e di due conseguenti, se la multiplice della prima eccederà la multiplice della seconda, e la multiplice della terza non eccederà la multiplice della quarta: allora la prima alla seconda auerà maggior proporzione, che la terza alla quarta.



Sieno quattro quãtità A, B, C, e D, e prese la E, & F equimultiplici delle antecedenti A, e C, e prese eziandio le G, & H equimultiplici delle conseguenti B, e D, e sia E multiplice della prima maggiore di G multiplice della seconda, & F multiplice della terza, non sia maggiore di H multiplice della quarta. Dico A a B auer maggior proporzione, che non ha C a D. Perche E è maggiore di G, & F non maggiore di H. Adunque *a* E a G hà maggior proporzione, che nõ hà F ad H. Ma *b* A ad E stà come C ad F, essendo medesima parte di loro. Adunque *c* A a G hà maggior proporzione, che non ha C ad H. E di più G a B

a Ass. 6. di questo.
b Dif. 8. di questo
c Corol. 2 della pr. 19. di questo.

d G a B stà come H a D, essendo l'antecedenti equimultiplici delle conseguenti; e perciò A a B ha maggior proporzione, che non ha C a D. Il che bisognaua &c.

d *Dif. 8. di questo.*
e *Corol. 2 prop. 19. di questo.*

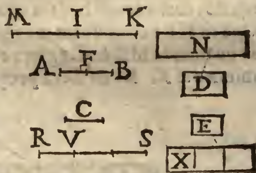
PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XXVI.

Se la prima quantità alla seconda auerà maggior proporzione, che la terza alla quarta, vi saranno tali equimultiplici dell' antecedenti, & tali equimoltiplici delle conseguenti, delle quali la multiplice della prima ecceda la multiplice della seconda, ma la multiplice della terza non ecceda la multiplice della quarta.

Eucl. la conuersa della Dif. 8. del lib. 5.

Abbia AB a C maggior proporzione, che D ad E. Dico esser possibile ciò che vien proposto. Perche AB a C hà

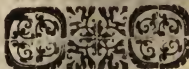


maggior proporzione, che D ad E. Adunque a alcuna quantità minore della prima AB auerà la medesima proporzione alla seconda C, che hà la terza D alla quarta E; ella si chiami AF, e si prendano delle quantità AF, AB, e D le equimultiplici MI, MK, & N, con tal patto, che KI loro

a *prop. 5. di questo.*

differenza sia maggiore di C. Di poi si prendano le equimultiplici RS di C, & X dell'altra E, con questa legge però, che RS sia eguale, ò sia la minima di tutte quelle, che eccedono MI, di modo, che l'eccesso sia minore di vna sua parte RV, ouero a C, e perciò l'eccesso di RS sopra MI sarà minore di IK, la quale è stata fatta maggiore di C. Onde MK sarà maggiore di RS, & MI non sarà maggiore della medesima RS. Dee adesso in queste equimultiplici dimostrarsi, che mentre MK è maggiore della RS, la N, ò è eguale, ò minore di X. Perche come stà AF a C, così stà D ad E; e le due MI, & N si son prese equimultiplici delle antecedenti AF, e D, e similmente le due RS, & X equimultiplici delle conseguenti C, & E. Adunque *b* come MI ad RS, così stà N ad X. Per la qual cosa, si come *c* MI non è maggiore di RS, così ancora N sarà eguale, ò minore di X. Ma MK si è dimostrata maggiore di RS. Adunque quando la MK è maggiore di RS, la N non è minore di X. Il che si era proposto.

b *Corol.* 1 *prop.* 19. *di questo.*
c *Corol. della pr.* 16. *di questo.*

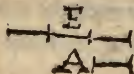


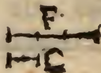
PRO-

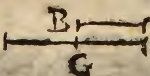
PROPOSIZIONE XXVII.

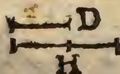
TEOREMA XXVII.

Se saranno quattro quantità di tal condizione, che le equimultiplici delle antecedenti dalle equimultiplici delle conseguenti, sia qualunque multiplicazione del si vuole, l'vna dall'altra, ò insieme mancano, ò sono insieme egnali, ò insieme eccedono, se si prenderanno quelle, che si corrispondono: le dette quattro quantità saranno proporzionali. *Euclid. Diffin. 6. del 5.*









SIeno le quattro quantità A, B, C, e D, e siano E, & F qualunque equimultiplici delle antecedenti A, e C delle infinite equimultiplici, che assegnare si possono; e siano parimente G, & H qualunque equimultiplici, cioè vagliono per le altre infinite equimultiplici delle conseguenti B, e D; & ogni qualunque volta, che E è maggiore di G, sia sempre F maggiore di H; & ogni volta, che E è eguale a G, sia parimente F eguale ad H, & in qualunque multiplicazione E è minore di G, sia sempre F minore di H. Dico la A alla B auere la medesima proporzione che há la C alla D. Poiche, se ciò non è vero, la A alla B auerà, ò maggiore, ò mi-

a prop. 26 di questo. minor proporzione di C a D; & in *a* qualunque caso, se la moltiplice E eccedera G, qualche volta F non eccedera H: ouero se la F eccede la H in qualche multiplicazione, E nõ eccedera la G: le quali cose son false, e contra il supposto. Adunque la A alla B non può auere maggiore, ò minor proporzione di quella, che ha la C alla D. Per la qual cosa le *b* A, B, C, e D saranno proporzionali. Il che bisognaua dimostrare &c.

b Dif. 12 di questo.

Fine del Libro terzo.



LIBRO QVARTO

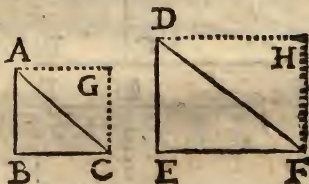
Degli ſpazi proporzionali.

DIFFINIZIONI.

I.

SI chiamano triangoli, ouero parallelogrammi Reciproci, quando due lati intorno à vn'angolo d'vna figura saranno due eſterni termini, & i due lati intorno à vn'angolo dell'altra figura ſaranno due mezzi di quattro proportionali.

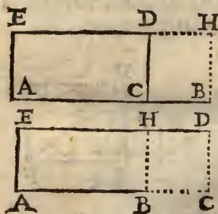
Eſempi grazia i due triangoli ABC, DEF, ouero i due parallelogrammi BG, EN ſarãno reciproci ſe AB ad ED ſtarà come FE à CB; atteſoche in queſta maniera l'angolo B della figura ABC ſarà contenuto dalla prima AB, e dalla quarta CB; e l'angolo E della figura DEF ſarà contenuto dalla ſeconda DE, e dalla terza EF delle quattro proporzionali.



De

I I.

De i parallelogrammi applicati sopra qualche retta linea, quello si dice mancante, il quale non occupa tutta la linea: e quello si dice eccedente, il quale occupa vna linea retta maggiore di quella sopra la quale è applicato: E l'eccesso, ouero il diffetto si dice la parte, ò pure lo slungamento del medesimo parallelogrammo applicato, il quale è stato descritto sopra il diffetto, ouero eccesso della linea data.

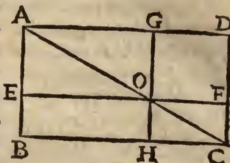


Esempi grazia il parallelogrãmo AD applicato sopra la retta AB si dice mancante, quando il suo lato AC non occupa tutta la linea AB; e si dice eccedente quando AC è maggiore di AB. E si dice diffetto nel primo caso, ouero eccesso nel secondo il parallelogrãmo CH.

I I I.

Se dal medesimo punto del diametro d'vn parallelogrammo saranno tirate due rette parallele à lati dello stesso parallelogrammo, i parallelogram-

logrammi, che dal diametro son tagliati, si chiamino costituiti intorno al diametro, e quei due parallelogrammi, che non son tagliati dal diametro, si chiamino parallelogrammi del compimento.



Se per essempio nel parallelogrammo BD sono tirate per il punto O preso nel suo diametro AC due rette HOG parallela al lato DC, ouero ad AB, & FOE parallela al lato CB, ouero DA, i parallelogrammi BD, HF, & EG si chiamino costituiti intorno al diametro, e i due parallelogrammi DO, e BO i quali dal diametro nõ son tagliati, sien detti parallelogrammi del Compimento.

PROPOSIZIONE I.

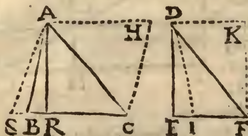
TEOREMA I.

I triangoli, & i parallelogrammi egualmente alti anno trà loro la medesima proporzione, che le basi; E se staranno trà loro come le basi, aueranno le altezze eguali. *Eucl. 1. del 6.*

SIeno primamente i due triangoli ABC, DEF egualmente alti, cioè le perpendicolari AR, e DE tirate sopra le base delle sommità A, e D

sieno

sieno trà loro eguali. Dico il triangolo ABC al triangolo DEF auere la medesima proporzione, che la base BC alla base EF, si *a* seghi EF in quanta si voglia moltitudine di parti eguali, l'vna delle quali sia EI, & in CB si prenda la SC, la quale sia qualunque moltiplice della stessa EI, sarà *b* la SC qualunque parti della EF: e si congiungano SA, ID. Perche quante volte la base *c* EI misura la base EF, tante volte il triãgolo EID misura il triangolo egualmente alto DEF; e quante volte EI *d* misura CS, tãte volte il triangolo DEI misura l'egualmente alto triangolo ASC. Adunque *e* il triangolo ASE è ancor egli parti medesime del triangolo DEF, si come SE è parti dell' altra EF. Sono adunque quattro grandezze, la prima la retta BC, la seconda la retta EF, la terza il triangolo ABC, la quarta il triangolo DEF, e due altre, cioè la base SE, & il triangolo ASE sono qualunque parti medesime delle consequenti, cioè della retta EF, e del triangolo DEF, cioè *f* a quelle anno qualunque proporzione medesima commensurabile, e quante volte SC è eguale alla prima BC, necessariamente *g* il triangolo ASC sarà eguale alla terza, cioè all'angolo ABC, e quante volte la SC è maggiore della BC, tante volte *h* ASC è maggio-



a prop. 28. del 1.

b Dif. 3. del 3.

c Corol 2. della pr. 32. del libro 1.

d L'istesso.

e Dif. 6. del 3.

f Dif. 8. del 3.

g prop. 32. del 1.

h Della prop. 32. del. 1

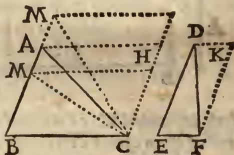
giore di ABC, e quando SC è minore di BC, sempre mai ASC sarà minore di ABC. Adunque *i* la base BC, primo termine al secondo EF, hà la medesima proporzione, che il triangolo ABC terzo termine, al triangolo DEF quarto termine. Il che bisognaua dimostrare.

i *prop. 23. del 3.*

Sieno secondariamente i parallelogrãmi BH, EK della medesima altezza. Dico che sono proporzionali alle base. Tirati i diametri AC, DF, i triangoli ABC, DEF saranno egualmente alti, e perciò *k* staranno trà loro come le base BC, EF: ma si come il triangolo *l* ABC al triãgolo DEF, così stà il doppio al doppio, cioè il parallelogrãmo *m* BH al parallelogrammo EK. Adunque il parallelogrammo *n* BH al parallelogrammo EK, starà come la base BC alla base EF, come bisognaua prouare.

k *Dalla 1. parte di questo.*
l *prop. 11. del 3.*
m *pro. 26 del 1.*
n *prop. 7. del 3.*

Terzo stia il triangolo ABC al triangolo DEF, ò pure il parallelogrãmo AH al parallelogrãmo EK, come la base BC alla base EF. Dico l'altezze de' triangoli, ouero de' parallelogrammi essere eguali. Se ciò non è vero, si seghi il triangolo, ò parallelogrammo MBC maggiore, ò minore di ABC, che abbia l'altezza eguale à quella di DEF. Adunque *o* lo spazio MBC allo spazio della medesima spezie DEF, starà



o *per la 1. e 2. part. di questa prop.*

starà come la base BC alla base EF: ma come BC ad EF, così staua ABC a DEF. Adunque i triangoli, *p* ouero i parallelogrammi MBC, & ABC anno la medesima proporzione allo stesso triangolo, ò parallelogrammo DEF: e perciò *q* MBC, & ABC sono eguali la parte, e'l tutto, che è impossibile. Adunque nõ altra altezza di quella dello spazio ABC è eguale all' altezza dello spazio DEF. Onde è manifesto ciò che si propose.

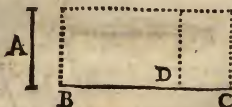
p prop. 7. del 3.

q prop. 4. del 3.

SCHOLIO.

Da questa proporzione facilmente si cauano le prime trè proposizioni, che nel secondo libro troppo prolissamente dimostrò Euclide.

Eucl. I. del 2.



Sia primamente la retta linea A non segata, e la BC sia segata in D. Dico il parallelogrammo rettangolo cõtenuto dalla A, e da BC (cioè la base del quale è BC, e l'altezza intorno all'angolo retto è A essere eguale à i rettangoli parallelogrammi cõtenuti dalle A, e BD, e dalle A, e DC. Perche tutti questi parallelogrammi rettangoli sono egualmente alti, auendo commune l'altezza misurata dalla retta linea A. Adunque a staranno trà loro come le base. Mà le base BD, DC insieme prese, sono eguale alla base BC: si che i rettangoli b fatti dalla BD in A, e dalla DC in A insieme presi, sono eguali al rettangolo fatto dalla base

a prop. 1. di questo, e prop. 22. del 3.

b Corol. della pr. 15. del 3.

base BC nell'altezza A. Il che bisognaua &c. Si supponga nel secondo luogo la non segata A eguale à tutta la C, per la medesima ragione il parallelogrammo fatto dall'altezza A in BC, ouero dalla BC in CB, cioè il quadrato di BC sarà eguale à due rettangoli dell'altezza A, ouero BC in BD, e di BC in CD insieme presi. Terzo si supponga la non segata A eguale alla porzione DC, sarà di nuouo il parallelogrammo di A, ouero DC in BC eguale à due rettangoli di A, ouero di CD in BD, e di DC in DC, cioè del c quadrato della stessa DC.

Euclid. 2. del 2. & pr. 24. del 1.

Euclid. 3. del 2.

c prop. 34 del 1.

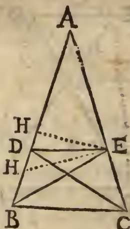
PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

La retta linea parallela alla base del triangolo sega proporzionalmente i di lui lati. E la retta segante proporzionalmente i lati del triangolo, è parallela alla base di quello.

Euclid. 2. del 6.

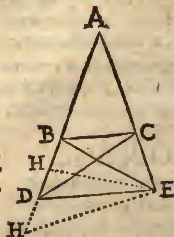
Sia il triangolo ABC, e la retta DE parallela alla base BC seghi i di lui lati in D, & E. Dico BD a DA auer la medesima proporzione, che la CE alla EA. Si congiungano le rette DC, EB. Perche i due triangoli DBE, ECD anno la medesima base DE, e DE, BC sono parallele tra loro. Adunque *a* sono tali triangoli trà lo-



a prop. 32 del 1.

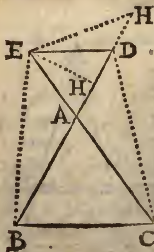
ro eguali: e perciò *b* al medesimo triãgolo ADE anno la medesima proporzione. Ma il *c* triangolo BED al triangolo DEA hà la medesima proporzione, che la base BD alla base DA (auuẽga che la perpendicolare tirata dal punto E sopra la retta AB, è all'altezza cõmune de'triangoli DEB, e DEA). Adunque *d* il triangolo DCE al triangolo DAE stà come BD a DA. E e stando di più il triangolo CDE al triangolo EDA, come la base CE alla base EA, perche sono della medesima altezza. Adunque *f* come BD a DA, così sta CE ad EA. Il che nel primo luogo bisognaua dimostrare.

b prop. 5. del 3.
c prop. 1. di questo.
d prop. 7. del 3.
e prop. 1. di questo.
f prop. 7. del 3.



Stia secondariamente BD à DA, come CE ad EA. Dico DE esser parallela alla base BC, se ciò non è vero, sia *g* EH parallela alla base BC. Adunque come *h* CE ad EA, così starà BH ad HA: ma come CE ad EA, così staua BD a DA, per questo come *i* BH ad HA, così sta BD a DA. E comparando nel primo caso le somme, ouero le differen-

g Corol. prop. 16. del 1.
h 1. parte di questo.
i prop. 7. del 3.

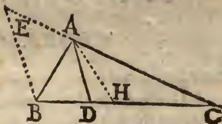


renze de' termini a i conseguenti, nel secondo, e terzo caso, starà BA ad AD, come BA ad AH. Laonde *k* AD, & AH saranno eguali, la parte è il tutto, che è falso. Non adunque la EH, ma bensì la ED è parallela alla base BC. Il che bisognaua prouare. *k prop. 4. del 3.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III.

Vna retta linea segante in parti eguali l'angolo alla cima d'vn triangolo, segarà la base nella medesima proporzione de' lati, di modo, che gl'Omologhi sieno confinanti. E se la base sarà segata nella medesima proporzione de' lati, sarà l'angolo alla cima segato per mezzo. *Eucl. 3. del 6.*



NEl triangolo ABC faccia la retta AD gli angoli DAB, DAC eguali trà loro. Dico BD a DC esser come BA ad AC. Producasi la CA, finche diuenga *a* EA eguale a BA, e si congiunga EB. Perche *b* gli angoli E, & ABE opposti a lati eguali EA, BA, sono trà loro eguali. Adunque *c* l'angolo esteriore CAB è doppio dell' angolo ABE: ma l'angolo CAB è doppio ancor egli dell' angolo DAB. Adunque i due angoli *a prop. 3. del 1.* *b prop. 6. del 1.* *c prop. 18 del 1.*

d prop. 16 del 1. DAB, & EBA alterni sono eguali, e perciò *d* la AD è parallela alla EB, base del triãgolo CEB. e prop. 2. di questo. Laonde *e* BD a DC, stà come EA, ouero *f* come la sua eguale BA ad AC. Come bisognaua &c.

f prop. 3. del 3. Stia nel secondo luogo BD a DC, come BA ad AC. Dico che la retta DA sega l'angolo BAC in parti eguali; se ciò non è vero, vn' altra retta g Per la 1. parte di questa prop. HA seghi in parti eguali l'angolo BAC; il perche come stà *g* BA ad AC, così starà BH ad HC: ma come BA ad AC, così staua BD a DC. Adunque h prop. 7. del 3. *h* come BH ad HC, così stà BD a DC. E comparando le somme alle consequenti, BC *i* sarà ad i prop. 14. del 3. HC, come BC a CD, e perciò *k* CH, e CD sono k prop. 4. del 3. eguali la parte, e'l tutto, il che è falso. Adunque non altra retta linea, fuor che la DA, sega in parti eguali l'angolo CAB. Il che bisognaua dimostrare &c.

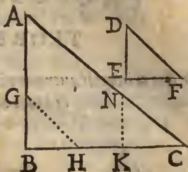
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV.

Eucl. 4. del 6. *De triangoli trà loro equiangoli, i lati che sono intorno à gli angoli eguali sono proporzionali, de' quali gli Omologhi sottendono gli angoli eguali. Cotal sorte de' triangoli si chiamino simili trà loro.*

NE triangoli ABC, DEF sieno i due angoli A, e D eguali tra loro, e parimente i due angoli B, & E eguali: Si che *a* i terzi angoli C, & F saranno eguali, essendo i compiment i a due a Dalla prop. 18. del 1. retti

retti nell'vno, e l'altro triangolo. Dico essere AB a BC come DE ad EF, e BC a CA come EF a FD, e CA ad AB come FD a DE (attesoche in questa guisa i lati Omologhi, cioè gli antecedéti della proporzionalitá sottēdono gli angoli eguali) si seghino *b* GB eguale a DE, & NC eguale a DF, e *c* si tirino GH parallela alla AC, e la NK parallela alla AB. Perche all'angolo medesimo A è eguale l'angolo D per il supposto, *d* e BGH, in virtù delle parallele GH, AC è eguale al medesimo angolo A. Adunque gli angoli BGH, & D sono eguali, & erano eguali gli angoli B, & E, e i lati agiacēti BG, DE erano eguali. Perciò *e* BH è eguale ad EF. Con vn simile discorso si mostrará nel triangolo NKC, essere KC eguale ad EF.) Di poi perche GH è parallela ad AC. Adunque *f* AB a BG stará come CB a BH. E permutando AB *g* a BC stará come GB a BH; e BG, e BH sono eguali a DE, & EF. Sì che come AB *h* a BC, così sta DE ad EF In oltre a cagione delle parallele AB, NK, *i* stará BC a CK, come AC a CN, e permutando *k* BC a CA, stará come KC a CN, ouero *l* come EF a FD (per esser queste eguali a quelle). Ed essendo AB a BC, come DE ad EF, e stando BC a CA, come EF ad FD. Adunque (per la *m* composizione ordinata)



b prop. 3. del 1.

c Corol. della pr. 16. del 1.

d prop. 15 del 1.

e prop. 25 del 1.

f prop. 2. di questo.

g prop. 12 del 3.

h prop. 3. e 7. del 3.

i prop. 2. di questo.

k prop. 12 del 3.

l prop. 3. e 7. del 3.

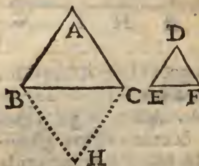
m pr. 19. del 3.

AB ad AC starà come DE a DF. Il che bisognaua dimostrare &c.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V.

Euclid. 5. del 6. *Se due triangoli aueranno i lati proporzionali, saranno trà loro equiangoli.*



NE triangoli ABC, DEF stia AB a BC come DE ad EF, e BC a CA stia come EF ad FD, e CA ad AB stia come FD a DE. Dico che i triangoli sono equiangoli.
a prop. 24 del 1. Si faccia l'angolo *a* HBC eguale all'angolo E, e l'angolo HCB si faccia eguale all'angolo F. Sarà
b Dalla prop. 18. del 1. adunque *b* l'angolo terzo H eguale all'angolo D. Laonde ne' triangoli equiangoli BCH, EFD
c prop. 4. di questo. *c* starà HB a BC, come DE ad EF; ma come DE ad EF, così staua AB a BC. Adunque *d* HB, &
d prop. 7. del 5. AB alla medesima BC, anno la medesima proporzione, e perciò *e* HB, & AB sono eguali trà
e prop. 4. del 5. loro. Per la medesima ragione HC sarà eguale ad AC, & è BC base commune. Adunque *f* gli
f prop. 7. del 1. angoli A, & H saranno eguali trà loro: ma era l'angolo D eguale all'angolo H: per questo i due angoli A, e D sono eguali trà loro. Per la mede-

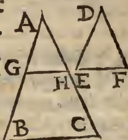
sima

ſima ragione gli angoli ABC, & E ſaranno trà loro eguali. Laonde i triangoli ABC, DEB ſono equiangolo. Il che biſognaua &c.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

Se due triangoli aueranno vn' angolo eguale ad vn' angolo, & intorno à gli angoli eguali ſaranno i lati proporzionali: i triangoli ſaranno ſimili. *Eucl. 6. del 6.*



NE' triangoli ABC, DEF ſieno gli angoli A, e D eguali, e come ſtà BA ad AC così ſtia DE a DF. Dico i triangoli eſſere ſimili. Si ſeghi *a* AG eguale a DE, e HA ſi faccia eguale à DF, e ſi congiunga GH,, & eſſendo gli angoli A, e D eguali i due triangoli *b* AGH, DEF ſaranno equiangoli, & equilateri trà loro. Ma BA ad AC, ſtà come ED a DF, ouero come *c* GA ad AH (in virtù dell'egualità). Adunque *d* permutando BA ad AG, ſtarà come CA ad AH; e perciò *e* GH ſarà parallela a BC. Onde *f* l'angolo B ſarà eguale all'angolo AGH; ma al medeſimo angolo AGH era eguale l'angolo E. Adunque gli angoli B, & E ſaranno eguali trà loro: ma erano prima eguali gli angoli A, e D; perciò *g* i triangoli ABC, DEF ſono trà di loro equiangoli, e ſimili. Il che biſognaua &c.

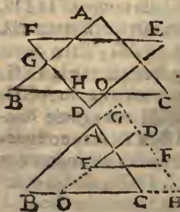
a *prop. 3. del 1.*
b *prop. 4. del 1.*
c *prop. 3. del 3.*
d *prop. 12 del 3.*
e *prop. 2. di queſto.*
f *prop. 15 del 1.*
g *Della prop. 4. di queſto.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII.

Eucl. 32. del 6. *Se in due triangoli due lati saranno proporzionali à due lati, di modo che gli Omologhi sieno paralleli trà loro, e i due primi sien volti verso le medesime parti, doue son volti i due secondi, ouero verso le parti opposte: i triangoli saranno simili, e le base parallele, ouero poste in diritto. E se i tre lati saranno paralleli à tre lati ad vno ad vno, i triangoli saranno simili.*

NE due triangoli ABC, DEF stia nel primo luogo BA ad AC, come ED a DF, e BA, e DE sieno equidistanti, come anche AC, e DF, & i due lati AB, AC dal punto A sien distesi verso le medesime parti, alle quali dal punto D riguardano le DE, DF, ò pure verso le parti opposte. Dico i triangoli ABC, DEF essere simili, e le base BC, & EF esser parallele, ouero poste in diritto; perche le due rette BA, e BC segano vna delle parallele AC, segarāno ancora *a* l'altra DF la seghino allungata, se fa di mestieri, ne' punti G, & H. Parimente CB, che sega AB,



a Dalla prov. 29. del 1.

AB, seghi ancora la DE parallela a quella nel punto O. E perche la retta GH è parallela alla base AC del triãgolo ABC. Adũque *b* il triangolo BGH è equiangolo al triangolo BAC. E perciò come sta BA ad AC, così starà BG a GH. Di più perche DO è parallela alla GB, base del triangolo HGB, starà parimente OD a DH, come BG a GH; e perciò *c* OD a DH, starà come BA ad AC: ma si supponeua, che ED a DF stesse come BA ad AC. Adunque *d* OD a DH starà come ED a DF, e gli angoli ODH, & EDF sono eguali *e* alla cima, ouero l'vno, & il medesimo (essendo che DE, OD sono in diritto, e così DF, HD, e le rette DE, e DF risguardano alle medesime parti, alle quali sono indirizzate le due rette AB, & AC, ouero DO, e DH, opure tendono alle parti opposte per l'ippotesi). Adunque i due *f* triangoli ODH, EDF sono tra loro equiangoli, & anno i lati proporzionali: e perciò *g* la base EF è parallela ad OH, ouero a BC; ò *h* saranno poste in diritto, se elleno si toccano: ma il triangolo ABC era equiangolo al triangolo DOH. Adunque i triangoli ABC, e DEF sono trà loro equiangoli, e perciò *i* simili.

b *Dalla prop. 6. di questo.*
c *prop. 7. del 3.*
d *prop. 7. del 3.*
e *Corol. prop. 5. del 1.*
f *prop. 6. di questo.*
g *prop. 2. di questo.*
h *Dalla prop. 17. del 1.*
i *prop. 4. di questo.*

Sieno nel secondo luogo AB, DE equidistanti, e parimente AC, DF sieno parallele, come anche BC, EF sieno parallele. Di nuouo dico, che i triangoli ABC, DEF sono simili. Imperciochè fatta la medesima costruzzione si dimostrerà, come sopra, essere il triangolo ODH simile al triangolo BAC, & è tirata la EF parallela ad OH,

base

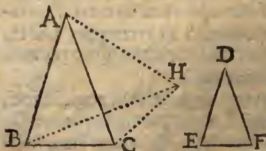
k *Dalla prop.6. di questo.* base del triangolo DOH. Adunque k il triangolo DEF è equiangolo al triangolo DOH, ouero al triangolo ABC. Il che bisognaua &c.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII.

Eucl. 7. del 6. *Se in due triangoli saranno due lati proporzionali à due lati, & i due angoli opposti à lati omologhi saranno eguali trà loro, e i due angoli opposti à gli omologhi rimanenti saranno della medesima specie, i triangoli saranno simili trà loro.*

NE triangoli ABC, e DEF abbia AB ad AC la medesima proporzione, che hà ED a DF, e gli angoli B, & E sieno eguali, che sono opposti a gli angoli omologhi AC, e DF, e i due angoli C, & F opposti a gli omologhi rimanenti sieno della medesima specie, cioè sieno amēdue acuti, ouero amēdue ottusi. Dico, che i triangoli ABC, e DEF sono



simili. Si faccia a l'angolo CAH eguale all'angolo D, e si seghi b AH eguale ad AB, e si congiunghino le rette CH, e BH. Perche le egua-

a prop.24 del 1.
b prop. 3. del 1.

li

li *c* BA, & HA anno alla medesima AC la medesima proporzione, & *E*D a DF, sta come BA ad AC. Adunque *d* AH ad AC, sta come *E*D a DF, e gli angoli CAH, e D sono eguali. Adunque *e* i triangoli ACH, & EDF sono equiangoli, e perciò gli angoli AHC & *E* sono eguali, e parimente gli angoli ACH, & F sono trà loro eguali; ed erano gli angoli ACB, & F della medesima specie. Adunque quando l'angolo ACB è acuto, eziandio l'angolo ACH sarà acuto, e quando quello sarà ottuso, questo ancora sarà ottuso: e perciò i due ACB, & ACH insieme presi, saranno, ò maggiori, ò minori di due retti: e perciò *f* le due rette BC, e CH non saranno poste in diritto, e verrà a formarsi il triangolo BCH. *E*d essendo i due angoli ABC, AHC eguali tra loro, per essere eguali al medesimo angolo *E*, e parimente *g* i due angoli ABH, & AHB essendo eguali (per essersi i lati AB, & AH fatti eguali) Adunque gli angoli composti, ouero differenziali HBC, e BHC saranno eguali trà loro; e perciò le rette *h* BC, & HC saranno eguali: ma i lati AB & AH si fecero eguali, & AC è commune. Adũque l'angolo *i* BAC è eguale all'angolo HAC. Ma al medesimo angolo HAC era eguale l'angolo D. Laonde gli angoli BAC, e D sono trà loro

c *prop.* 3. *del* 3

d *prop.* 7. *del* 3.

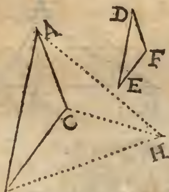
e *prop.* 6. *di questo.*

f *Dalla prop.* 13. *del* 1.

g *prop.* 6. *del* 1.

h *prop.* 20 *del* 1.

i *prop.* 7. *del* 1.



egua-

k *Dalla prop. 4. di questo.*

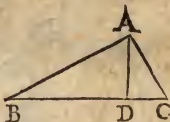
eguali: e gli angoli ABC, & *E* si posero eguali. Adunque *k* i triangoli ABC, e D*E*F sono simili. Il che bisognaua prouare.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA IX.

Eucl. 8. del 6.

La perpendicolare tirata dall' angolo retto del triangolo rettangolo sopra la base, lo diuide in due triangoli simili al tutto, e trà di loro, & è media proporzionale trà le porzioni della base, e fà l'vna, e l'altra parte terza proporzionale di tutta la base, e del lato confinante alla detta porzione.



NEl triangolo ABC sia l' angolo BAC retto, e dal punto A cada la perperdicolare AD sopra la base, segandola nel punto D. Dico che i triangoli BAD, ACD, e BCA sono simili trà loro; & AD è media proporzionale trà le porzioni BD, e DC, e che CB a *B*A stà come *A B* a *B*D, e che parimēte le tre *B*C, C A, e DC sono proporzionali. Perche ne' triangoli *BA*C, BDA l'angolo *B* è commune, e gli angoli retti *BA*C, *B*DA sono eguali. Adunque *a* il terzo angolo C è eguale all'angolo *B*AD; e perciò *b* i triangoli *BA*C, *B*DA sono simili, e intorno all' angolo commune il lato C*B* a *B*A auera la medesi-

a *Dalla prop. 18. del 1.*

b *prop. 4. di questo.*

ma

ma proporzione, che hà *AB* a *B*D. Similmente ne'triangoli CA*B*, CDA l'angolo C è commune, e i due angoli CA*B*, CDA sono retti, e però eguali. Adunque i *c* triangoli CA*B*, CDA sono simili trà loro; e *B*C a CA, stà come AC a CD. Finalmente ne'trangoli *B*AD, ACD i due angoli *B*AD, e C si sono dimostrati eguali, e i due angoli retti *B*DA, ADC sono eguali; adunque i triangoli *d* *B*AD, ACD sono eziandio equiangoli trà loro, e simili, e i lati intorno a gli angoli retti eguali sono proporzionali. Si che *B*D a DA, stà come AD a CD. Attesoche in questa guisa gli omologhi sottendono gl'angoli eguali, & AD è la media proporzionale trà le *B*D DC. Laonde è chiaro quello che si propose.

c Dalla prop. 4. di questo.

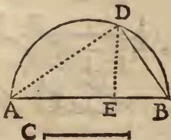
d Dalla stessa.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA I.

Date due rette linee, ritrouare la terza, ouero la media proporzionale.

Eucl. 11, 15. del 6.



Sieno date le due rette linee AB, e C, à queste si dee ritrouare la terza proporzionale. Si descriua sopra la maggiore A*B* il semicerchio AD*B*, nel quale si *a* applichi la *B*D eguale alla minore C: e

a prop. 12. del 2.

dal

b prop. 11 del 1. dal punto D cada *b* la perpēdicolare DE, segando la A*B* nel punto E. Dico *B*E essere la terza proporzionale ricercata. Congiunta la retta AD; nel *c* semicerchio l'angolo AD*B* sarà retto, e dall'angolo retto si tira la perpendicolare DE alla base del triangolo rettangolo AD*B*. Adunque *d* come stà A*B* à *B*D, così sta D*B*, ouero C à *B*E; e perciò la *B*E è la terza proporzionale cercata.

c prop. 20 del 2.

d prop. 9. di questo.

Deesi nel secondo luogo trà la AB, e la C ritrouare la media proporzionale. Dal diametro AB *e* si seghi BE eguale a C, e *f* si eleui la perpendicolare ED, e si compisca *g* il triangolo rettangolo ADB, come sopra, *h* le tre AB, BD, e BE, ouero C saranno continue proporzionali. Laonde BD è la media ricercata; come era bisogno di fare.

e prop. 3. del 1.

f prop. 10. del 1.

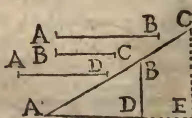
g prop. 20 del 2.

h prop. 9. di questo.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA II.

Eucl. 12. del 6. *Date trè rette linee ritrouare la quarta proporzionale.*



DAte le tre rette linee AB, BC, & AD, dee ritrouarsi la quarta, alla quale la AD abbia la medesima proporzione, che hà AB a BC. Si distendono in diritto la AB, e la BC, e la DA faccia con la

CA qualſiuoglia angolo, e ſi congiunga la retta BD, e ſi tiri *a* la CE parallela á BD, che ſeghi la retta AD diſteſa alle parti di D in E. Dico la DE eſſere la ricercata. Perche nel triangolo CAE è tirata la BD parallela alla baſe CE. Adunque *b* come AB à BC, così ſtá AD a DE. Il che douea farſi.

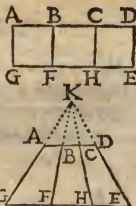
a Corol. prop. 16. di queſto.
b prop. 2. di queſto.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA III.

Segare vna data retta linea ſecondo le date proporzioni.

Eucl. 10. del 6.



DEue ſegarſi la data retta linea GE, ſecōdo le proporzioni di AB à BC, e di BC à CD. Si diſtendono in diritto le rette linee AB, BC, CD: e *a* ſi ponga AD parallela alla retta GE: e ſi congiunghino da i punti A, D, à i termini G, & E le rette linee AG, e DE. Le quali ſieno primamente parallele tra loro, e ſi diſtendano le rette *b* BF, CH parallele ad HG, ouero à DE, che seghino la GE ne'punti F, & H. Sara diuiſo lo *c* ſpazio AE ne i parallelogrãmi AF, BH, CE, ne'quali le rette GF, FH, HE ſono eguali a gli oppoſti lati AB, BC, CD, e però quelle parimente aueranno la medeſima proporzione, che anno le AB, BC, CD.

a Corol. prop. 16. del 1.
b Corol. prop. 16. del 1.
c prop. 16 lib. 1.

Con-

Concorrono nel secondo luogo le AG, e DE in K, e si tirino da' punti *B*, C a K le rette linee *B*K, CK, che seghino la GE in F, & H. E perche GF è parallela alla base A*B*. Adunque *d* i triangoli AK*B*, e GKF sono simili; e perciò come *B*K ad FK, così sta A*B* a GF. Per la medesima ragione, come sta la medesima *B*K alla medesima FK, così sta la *B*C ad FH: e così ancora dimostrerassi la CD ad H*E*. Laonde *e* permutando come A*B* a *B*C, così starà GF ad FH, e come *B*C a CD, così starà FH ad H*E*, per la qual cosa si è fatto quel che si cercaua.

d Dalla prop.6. di questo.

e prop.12. del 3.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA X.

Se due triangoli, ouero due parallelogrammi aueranno vn'angolo eguale ad vn' angolo; haueranno la proporzione composta delle proporzioni de i lati, i quali comprendono gli angoli eguali.

Eucl. 23. del 6.

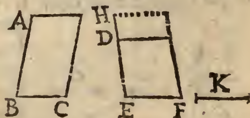
A H D B C E F K

Sieno i due triangoli, ouero i parallelogrammi A*B*C, DEF, gl'angoli de' quali *B*, & *E* sieno eguali trà loro. Dico la figura A*B*C alla figura D*E*F (comparádo mai sempre quelle che sono della medesima spe-

ſpecie, cioè i triangoli trà di loro, e i parallelogrammi trà di loro) auere la proporzione compoſta della proporzione del lato BC ad EF, & della proporzione del lato AB al lato DE. Si faccia *a* EF a K, come AB à DE, e nel lato eleuato DE, *b* ſi ſeghi EH eguale al lato eleuato AB dell'altra figura, e ſi compiſca il triangolo, ouerò il parallelogrãmo HEF. Perche ſe intenderemo da i termini A, H cadere linee rette perpendicolari ſopra le baſi BC, & EF, formaranno due triangoli rettangoli, ne'quali l'angolo B è eguale all'angolo E, e gli eguali lati AB, HE, ſottendono gli angoli retti. Adunque *c* gli altri lati, cioè le perpẽdicolari tirate da A, H ſopra le baſi BC, & EF ſaranno eguali fra loro, e però *d* la figura ABC alla figura della medeſimà ſpecie HEF, e della ſteſſa altezza, auerà la medeſima proporzione, che la baſe BC alla baſe EF. Ed è la figura FHE alla figura della medeſima ſpecie FDE, come HE a DE (per eſſere la perpendicolare tirata da F ſopra HE, comune altezza delle figure) & HE, ouero *e* l'eguale a lei AB a DE, ſtà come EF à K.

a prop. 11. di queſto.
b prop. 3. del 1.
c prop. 25 del 1.
d prop. 1. di queſto.
e prop. 3. del 3.

Adunque *f* la figura HEF alla figura DEF, ſtà come EF à K. Laonde *g* per l'ordinata cõpoſizione, quella proporzione, che hà la prima figura ABC al-



f prop. 7. del 3.
g prop. 19 del 3.

la terza della medesima specie DEF, auerà ancora la prima retta BC alla terza K. Ma BC à K hà la proporzione composta della proporzione di BC ad EF, e della proporzione della stessa EF à K; & è EF à K, come AB a DE. Adunque *h* la proporzione della figura ABC alla figura della medesima specie DEF, vien composta delle medesime proporzioni de' lati BC ad EF, e di AB a DE: il che bisognaua &c.

h prop. 19 del 5.

PROPOSIZIONE XIV.

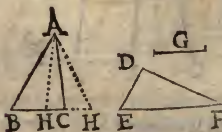
TEOREMA XI.

Eucl. 14. 15. del 6.

Se due triangoli, ouero due parallelogrammi aueranno vn' angolo eguale ad vn' angolo, & aueranno intorno gl' angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali: saranno eguali trà loro. E se saranno eguali aueranno i lati circa gli angoli eguali reciprocamente proporzionali.

SIeno nel primo luogo due triangoli, ouero due parallelogrãmi ABC, e DEF, gli angoli de' quali B, & E sieno eguali trà di loro, e come il lato AB, a DE, così stia FE a CB; (impercioche *a* così le figure ABC, e DEF sono reciproche, essendo ABC contenuta dalla prima AB,

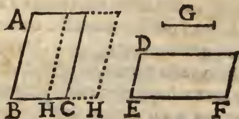
a Dif. 1. di questo.



AB, e dalla quarta CB, e DEF, essendo contenuta dalla seconda DE, e dalla terza EF delle quattro proporzionali). Dico che i triangoli ABC, e DEF, ouero i parallelogrammi sono eguali trà di loro. Si faccia *b* EF a G, come AB a DE. Perche la EF alla BC, stà come AB a DE, e come AB a DE, così sta EF a G. Adunque *c* EF alle due BC, e G hà la medesima proporzione; e perciò *d* la BC, e la G sono eguali. Ma la BC a G, *e* hà la proporzione composta della proporzione di BC ad EF, e della proporzione della stessa EF a G, cioè del lato AB al lato DE. Adunque le due proporzioni de' lati, i quali contengono gli angoli B, & E, compongono la *f* proporzione di egualità, che hà la BC a G. Ma *g* la proporzione della figura ABC alla figura della medesima specie DEF, è composta delle medesime proporzioni de' lati BC ad EF, & di AB a DE. Adunque *h* la figura ABC alla figura della medesima specie DEF, hà la medesima proporzione di egualianza, che hà la BC alla G, come si cercaua.

b *prop.* 11 *di questo.*
c *prop.* 7. *del* 5.
d *prop.* 4. *del* 5.
e *prop.* 19 *del* 5.
f *prop.* 19 *del* 5.
g *prop.* 13 *di questo.*
h *prop.* 7. *del* 5.

Sieno nel 2. luogo i triangoli ABC, e DEF, ò pure i parallelogrammi trà di loro eguali, e gli angoli B, & E sieno eguali. Dico che la AB a DE, stà reciprocamente come EF a BC. Se ciò non è vero, come AB a DE, così si



faccia EF alla BH maggiore, ò minore di BC, e si compisca il triangolo, ouero il parallelogrammo ABH. E perche le due figure ABH, e DEF della medesima specie hanno i lati reciprocamente proporzionali intorno a gli angoli B, & E eguali. Adunque *i* la figura ABH è eguale alla figura DEF; ma per l'ippotesi la figura ABC era eguale alla DEF. Adunque le figure ABH, & ABC sono eguali tra loro, la parte, e il tutto, il che è impossibile. Adunque la EF alla maggiore, ò minore della BC, non può auere la medesima proporzione, che há la AB a DE, e perciò la BF alla stessa BC, stà reciprocamente come la AB alla DE. Il che bisognaua dimostrare.

i Dalla 1. parte di questa propos.

COROLLARIO I.

Eucl. 16. del. 6.

Quindi è, che se quattro rette linee saranno proporzionali, il parallelogrammo rettangolo contenuto dall'estreme, è eguale a quello, che vien contenuto dalle medie. E se due parallelogrammi rettangoli saranno eguali, sarà l'vno contenuto dalle estreme, e l'altro dalle medie di 4. rette proporzionali. Imperciochè due parallelogrammi rettangoli, l'vno de' quali è contenuto dalla prima, e quarta, l'altro dalla seconda, e terza di quattro rette proporzionali, anno intorno a gli angoli retti eguali i lati reciprocamente proporzionali. Adunque *k* sono eguali trà di loro; e se saranno eguali, aueranno i lati intorno *l* a gli angoli retti reciprocamente propor-

k prop. 14 di questo.
l Dalla stessa.

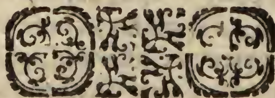
porzionali, e perciò vno ne farà contenuto dalla prima, e quarta, e l'altro dalla feconda, e terza delle quattro rette proporzionali.

COROLLA RIO II.

E fe tre rette linee faranno proporzionali, il rettangolo contenuto dalle eftreme farà eguale al quadrato defcritto dalla media. E fe il quadrato farà eguale al rettangolo, il lato del quadrato farà medio proporzionale trà i due lati, che contengono il rettangolo. Poiche le tre rette proporzionali diuerranno quattro proporzionali, pofta due volte la media proporzionale (e perciò, come fi è detto nel precedente Corollario) il rettangolo contenuto dalle eftreme farà eguale a quello, che è contenuto da due medie, che fiano tra loro eguali, cioè al *m* quadrato della media proporzionale. Medefimamente effendo il quadrato eguale al rettangolo, il quadrato farà contenuto da due medie tra loro eguali, cioè da vna media di trè proporzionali.

Eucl. 17. *del* 6.

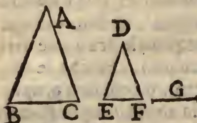
m *pr.* 34. *del* 1.



PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIII.

Eucl. 19. del 6. *I triangoli simili anno dupplicata proporzione di quello de i lati Omologhi.*



Sieno i due triangoli ABC, e DEF simili trà di loro, gl'angoli de' quali B, & E sieno eguali, e i lati omologhi AB, e DE, ouero BC, & EF. Dico il triangolo ABC al triangolo DEF auere duplicata proporzione di quella di qualsiuoglia lato BC al
a prop. 11. di questo. suo omologo EF. Si faccia *a* EF a G, come AB a DE. Perche per la similitudine de' trian-
b prop. 4. di questo. goli ABC, e DEF stà *b* AB a DE, come BC ad EF; ma come AB a DE così è stata fatta EF a
c prop. 7. del 5. G. Adunque *c* come BC ad EF, così stà EF a G. Perloche *d* la BC a G hà duplicata proporzione
d prop. 19 del 3. di quella, che hà la BC alla EF, ò pure la AB alla DE. Ma è la proporzione del triangolo ABC al DEF equiangolo a quello, come la BC alla G
prop. 13 di questo. (auuenga che *e* è composta delle proporzioni de' lati BC ad EF, & di EF a G, ouero di AB a DE.)
f prop. 7. del 3. Adunque *f* il triangolo ABC al triangolo DEF simile a quello hà dupplicata proporzione di quella di qualsiuoglia lato BC all'omologo EF. Il che bisognaua dimostrare.

PRO-

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA IV.

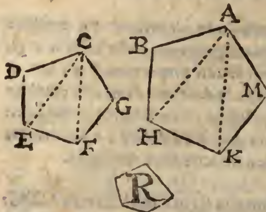
Sopra vna data retta linea descriuere vn poligono equiangolo à vn datò poligono, e che intorno à gli angoli eguali abbia i lati proporzionali à i lati di quello, di modo che la data retta linea sia omologa al dato lato del poligono. Si chiamino somiglianti figure moltilatere simili trà di loro, e similmente descritte sopra le date rette linee omologhe. *Eucl. 18. del 6.*

SIa data qualsiuoglia figura moltilatera CDG: si hà da descriuere sopra la data retta AB vna figura, ciaschuno angolo della quale sia eguale a ciascheduno angolo della figura data, & che intorno a gli angoli eguali siano i lati proporzionali, di modo che la AB sia omologa al dato lato DG. Dall'angolo C si tirino a ciascheduno angolo opposto della figura le rette linee C*E*, e CF, che diuidano la figura ne' triangoli CD*E*, C*E*F, e CFG. Di poi facciasi *a* l'angolo BAH eguale à DC*E*, & HAK si faccia eguale all'angolo *E*CF, e l'angolo KAM facciasi eguale all' angolo FCG, e così di mano in mano, se più ve ne saranno, onde tutto l'angolo BAM sarà eguale all'angolo D*E*G. Di più come *b* stà la DC a C*E*, così facciasi la BA alla AH, e come la *E*C alla CF, così facciasi la AH alla KA, e come la FC alla CG, così facciasi la KA alla AM; e così seguitando finche ve

a *prop. 24 del 1.*

b *prop. 11 di questo.*

n'è di biſogno. E' manifeſto *c* per l'ordinata com-
c prop. 19 del 3. poſizione, che BA ad AM, ſta come DC a CG:
ſi congiungano finalmẽte le rette BH, HK, KM.



Dico che la figura ABM è quella, che ſi cercaua. Perche intorno a gli angoli eguali DC*E*, e BAH, i lati DC a C*E*, e BA ad AH anno la medeſima proporzione.

d prop. 6. di queſto. Adunque *d* i triangoli DC*E*, e BAH ſono ſimili, e parimente i triangoli *E*CF, & HAK ſaranno ſimili, ſi come ſaranno ſimili eziandio i triangoli
e prop. 4. di queſto. FCG, KAM. Laonde gli *e* angoli C*E*D, AHB ſono eguali, e come ſtà D*E* ad *E*C, così ſtà BH ad HA, e ſono parimente eguali gli angoli B, e D, e come CD a D*E*, così ſta AB a BH. In oltre in virtù della ſimilitudine de' triangoli *E*CF, & HAK, gli angoli C*E*F, AHK ſono eguali, e come C*E*
f prop. 19. del 3. ad *E*F, così ſtà AH ad HK; ma era prima come D*E* ad *E*C, così BH ad HA. Adunque per *f* la compoſizione ordinata, come D*E* ad *E*F, così ſtarà BH ad HK, e ſono gli angoli D*E*C, BHA eguali, e parimente gli angoli, C*E*F, AHK ſi ſono moſtrati eguali. Però l'angolo tutto D*E*F è eguale all'angolo tutto BHK. Per la medeſima

ra-

ragione g l'angolo G sarà eguale all'angolo M, & FG, starà a GC come KM ad MA, e sarà l'angolo AKM eguale all'angolo CFG, & AK a KM, starà come CF ad FG. Ma h per la similitudine de' triangoli intorno à gli angoli eguali EFC, e HKA, i lati EF ad FC, & HK a KA sono proporzionali. Adunque i per l'ordinata composizione HK a KM, starà come EF ad FG, e sono tutti gli angoli HKM, & EFG eguali tra loro (essendo cõposti di eguali) e così de gli altri, se più ve ne saranno. Laonde tutti gli angoli della figura ABM sono eguali a tutti gli angoli della figura CDG, ad vno ad vno, & intorno a gli angoli eguali sono i lati proporzionali, gli omologhi de' quali sono le date rette linee AB, e CD. Si che si è fatto ciò che si era proposto di fare. Si chiamino ora somiglianti poligoni ABM, e CDG simili trà loro, e similmente descritti sopra gli omologhi AB, e CD.

g prop. 4. di questo.

h prop. 4. di questo

i prop. 19. del 3.

COROLLARIO.

Di quì facilmente si caua, che quei spazi rettilinei, che sono simili al medesimo rettilineo; sono anche simili trà loro.

Eucl. 21. del 6.

Imperòche se al medesimo rettilineo CDEF k si facciano, ouero si suppongano esser simili i due poligoni ABM, & R, cioè che siano equiangoli al medesimo CDG, & abbiano la medesima proporzione i loro lati, saranno ancora i due rettilinei ABM, & R equiangoli trà loro, & l aueran-

k prop. 16 di questo.

l prop. 7. del 3.

ti AB a BC, & FG a GH anno la medesima proporzione. Adunque e i triangoli ABC, & FGH sono simili; e perciò gli angoli BCA, GHF sono eguali, & AC a CB, ità come FH ad HG. Finalmente f il triangolo ABC al triangolo a se simile FGH hà duplicata proporzione di quella, che ha il lato AB al suo omologo FG. Per la medesima ragione sendo intorno a gli angoli E, M, i lati proporzionali, sarà il triangolo AED al simile FMK in duplicata proporzione di quella del lato DE al suo omologo KM; ò pure duplicata di quella del lato AB ad FG. Dopoi perche gli angoli BCD, GHK sono eguali, e i tolti via BCA, e GHF si sono mostrati eguali. Adunque gli angoli rimanenti ACD, & FHK sono eguali, e staua AC a CB, come FH ad HG, & è BC a CD, come GH ad HK, per la similitudine de' poligoni. Adũque g per la composizione ordinata starà AC a CD, come FH ad HK, e contengono gli angoli eguali ACD, & EHK; Adunque h il triangolo ACD è simile al triangolo FHK, & i a lui ha duplicata proporzione di quella, che ha il lato CD al suo omologo HR, ouero duplicata del lato AB ad FG. Per la medesima ragione gli altri triangoli (se più ve ne saranno) aueranno tra di loro duplicata proporzione del lato AB ad FG, e perciò tutti k i triangoli antecedenti insieme presi a tutti i triangoli conseguenti insieme, cioè la figura R ad S auerà la medesima proporzione, che hà l'vn triangolo ABC ad vn FGH, ò pure auerà la medesima duplicata proporzione di qual si voglia

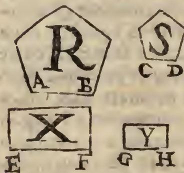
e prop. 6. di questo.
f prop. 15. di questo.
g prop 19 del 3.
h prop. 6. di questo
i prop. 15 di questo
k prop. 15 del 3.

glia lato BC al suo omologo GH: il che bisognaua dimostrare.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XIV.

Eucl. 22. del 6. *Se i lati omologhi di quattro figure simili saranno proporzionali, gli stessi rettilinei saranno ancora proporzionali trà loro. E se i rettilinei simili saranno proporzionali, i loro lati omologhi saranno ancora proporzionali.*



Sieno le due figure R, & S simili tra di loro, e parimente le due figure X, Y sieno simili tra di loro: e habbia primamente AB lato della figura R al suo omologo lato CD della figura S, la medesima proporzione, che hà EF lato della figura X al suo omologo lato GH della figura Y. Dico che la figura R ad S ha la medesima proporzione, che hà X alla figura Y. Perche *a* la figura R alla S a lei simile hà proporzione duplicata di quella, che hà il lato AB al suo omologo CD; Ed è parimente la proporzione della figura X alla Y a lei simile, è duplicata di quella che hà il lato EF all'omologo GH. E sono *b* le proporzioni duplicate delle simili,

a prop. 17 di questo.

b prop. 19 del 3.

mili,

mili, ò pure delle medesime proporzioni AB à CD, & EF a GH, le medesime ancora, ouero simili. Adunque *c* la proporzione della figura R alla S è la medesima, che quella della figura X ad Y. Il che si doueа nel primo luogo prouare. *c prop. 7. del 3.*

Sia secondariamente la figura R alla S a lei simile, come la X alla figura Y a lei simile; e sieno AB, CD, EF, GH lati omologhi. Dico che AB a CD stà come EF a GH. Perche le proporzioni delle figure R alla figura simile S, & X alla simile Y sono medesime, e *d* sono duplicate delle proporzioni de'lati omologhi. Adunque *e* le loro suduplicate, cioè le proporzioni de'lati AB a CD, & EF a GH, sono ancora le medesime. Il che bisognaua dimostrare. *d prop. 17 di questo. e Dalla prop. 19 e 21. del 3.*

PROPOSIZIONE XIX.

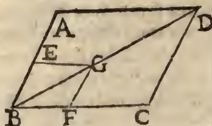
TEOREMA XV.

I parallelogrammi posti intorno ad angoli eguali, & intorno al comune diametro, che habbiano i lati in diritto saranno simili trà di loro. E se saranno simili trà di loro, & abbiano i lati omologhi posti in diritto, saranno situati intorno al comune diametro. Et i due parallelogrammi del compimento saranno eguali trà loro. *Eucl. 24. e 26. del 6. e 34. del 1.*

I Due parallelogrammi AC, & EF sieno collocati intorno al comune diametro DBG, intorno a gli angoli eguali ABC, & EBF, & abbiano

biano i lati omologhi AB, BE posti in diritto, e posti parimente in diritto i lati CB, e BF. Dico nel primo luogo i parallelogrammi AC, & EF esser simili. Perche la retta EG parallela alla DA base del triangolo DBA sega i due suoi lati; Adūque *a* il triangolo ABD è simile al triangolo EBG: e perciò i lati omologhi AB a BE, & DA ad EG, e medesimemente DB a BG, aueranno la medesima proporzione.

a *Dalla prop. 6. di questo.*

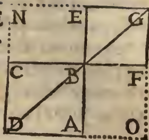


Similmente, perche FG è parallela alla DC base del triangolo CDB, saranno i triangoli CDB, GBF simili trà di loro, e come sopra i lati omologhi CB a BF, e DC a GF aueranno la medesima proporzione, che hà la medesima BD alla medesima BG. E però *b* AB a BE, AD ad EG, DC a GE, & CB a BF aueranno la medesima proporzione. Laonde *c* permutando AB a BC, starà come EB a BF intorno a gli angoli eguali ABC, EBF; e parimente intorno gli angoli eguali *d* alterni, ouero all'esteriore, & interiore DAB, e GEB, starà BA ad AD, come BE ad EG, e così tutti gli altri lati opposti. Laonde *e* i parallelogrammi AC, & EF saranno simili trà di loro.

b *prop. 7. del 3.*
c *prop. 12 del 3.*
d *prop. 15 del 1.*
e *prop. 16 di questo.*

Sieno nel secondo luogo i parallelogrammi AC, EF simili, & abbiano i lati omologhi AB, e BE posti in diritto, e così posti in diritto i lati CB, e BF; e si tirino i diametri DB, e BG. Dico DBG essere

essere vna sola retta linea. Perche ne' due triangoli DC*B*, *B*EG, i lati DC, e *B*E son paralleli, essendo la A*B*, e la *BE* poste in diritto, e *f* la AB parallela all'opposto lato DC nel parallelogrammo GA; e per la medesima ragione sono paralleli i lati C*B*, & *E*G, e gli angoli *g* DC*B*, e *B*EG sono eguali per la similitudine delle figure: Adũque *h* le base D*B*, *B*G sono parallele tra loro, e si *i* toccano nel punto *B*. Perloche son poste in diritto.



f prop 26. del 1.

g prop. 17 di questo.

h prop. 7. di questo.

Terzo dico, che i parallelogrammi del compimento N*B*, e *B*O sono eguali trà loro. Perche *k* intorno a gli angoli eguali alla cima E*B*C, & F*B*A i lati son reciprocamente propozionali; poiche come A*B* a *B*E, si è così dimostrata C*B* a *B*F. Adunque i parallelogrammi *l* N*B*, e *B*O sono eguali. Le quali cose doueansi dimostrare.

i prop. 17. del 1.

k Corol. della pr. 5.

l prop. 14. di questo.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA V.

Sopra vna retta linea data in vn'angolo dato applicare vn parellelogrammo eguale à vn rettilineo dato.

Eucl. 14. e 45. del 1.

Sia la figura rettilinea RS, e qualsiuoglia retta data A*B*, e l'angolo dato C. Deue applicarsi sopra la retta A*B* il parallelogrammo eguale al ret-

rettilineo RS nell'angolo C. Si spartisca il ret-
a prop.33. del 1. tilineo ne'triangoli R, & S, e si faccia *a* il parallelogrammo DEF eguale al triangolo R nell' angolo E eguale a C: e parimente si faccia il parallelogrammo GL eguale al triangolo S, il di cui angolo H sia eguale al medesimo angolo C.

b prop.24 del 1. c prop.11. di questo.



Dopoi facciasi *b* l'angolo *BAK* eguale all' angolo C, e come *c BA* a DE, così si faccia FE ad AM, e si compisca il parallelogrammo AN Facciasi medesimamente come NM a GH, così LH ad MK, e si compisca il parallelogrãmo MO. Per-
d prop.14 di questo. che *d* i due parallelogrãmi AN, e DF intorno a gli angoli eguali A, & E, anno i lati reciprocamente proporzionali, adunque sono trà di loro eguali, ed il triangolo R si è fatto eguale al parallelogrammo DF. Si che il parallelogrammo
e prop.15 del 1. AN è eguale al triangolo R. Di poi perche *e* le *AB*, MN son parallele, sarà l'angolo esteriore *K*MN eguale all'angolo A interiore, & opposto, & è l'angolo H eguale all'angolo C, ouero ad A, però i due angoli H, e *K*MN sono eguali trà loro; ed intorno a questi angoli eguali sono i lati reciprocamente proporzionali. Adunque *f* il
f prop. 14 di questo parallelogrammo GL, ouero il triangolo S a lui eguale, sarà eguale al parallelogrammo MO.

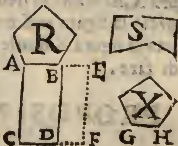
Per-

Perloche i due parallelogrammi AN, & MO, cioè il parallelogrammo KABO, sarà eguale a due triangoli R, & S, ò pure al rettilineo dato. Ed è applicato sopra la retta AB nell'angolo A eguale a C. Adunque si è fatto il problema.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA VI.

Dati due poligoni, desciuerne vn terzo, il quale sia simile all'vno, & eguale all'altro de' dati.



SIeno le due date figure rettilinei R, & S, deue descriuersi vna figura, che sia eguale alla figura S, e simile alla figura R, sopra qualsiuoglia lato AB della figura R, *a* si faccia il parallelogrammo AD eguale allo spazio R in qualsiuoglia angolo BAC, e prodotta la AB in E sopra la BD nell'angolo EBD, il quale sarà *b* eguale all'interio.., & opposto BAC, facciasi *c* il parallelogrammo BF eguale allo spazio S. Egli è certo, che i parallelogrammi AD, e BF sono tra le medesime parallele AE, CF. Di poi frà le due rette AB, e BE, si faccia *d* la media proporzionale GH, sopra la quale si e faccia la figura X simile ad R, di modo che GH sia lato omologo

a *prop.* 20 *di questo.*
b *prop.* 15 *del* 1.
c *prop.* 20 *di questo.*
d *prop.* 10 *di questo.*
e *prop.* 16. *di questo.*

logo ad AB. Perche R, & X son figure simili; aurá *f* R ad X proporzione duplicata di quella, che ha il lato AB al suo omologo GH. Ma *g* AB a BE ha duplicata proporzione di quella, che hà AB alla media proporzionale GH. Adunque *h* come AB a BE, così stà la figura R alla figura X; ma *i* il parallelogrammo AD al parallelogrammo BF, stà come la base AB alla base BE (essendo tra le medesime parallele). Perciò la *k* figura R alla figura X, stà come il parallelogrammo AD al parallelogrammo BF: ma il parallelogrammo AD è eguale alla figura R, & il parallelogrammo BF è eguale allo spazio S. Adunque *l* la figura R alla figura X, stà come la stessa figura R alla figura S; e perciò la figura *m* X è eguale allo spazio S, e si è fatta la figura X simile ad R. Il che era mestieri di fare.

f prop. 17 di questo.
g prop 19 del 3.
h prop. 7 del 3.
i prop. 1. di questo.
k prop. 7. del 3.
l prop. 3. del 3.
m prop 4 del 3.

PROPOSIZIONE XXII.

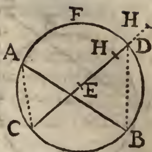
TEOREMA XVII.

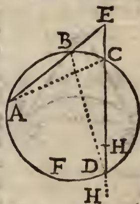
Se in vn cerchio saranno distese due rette linee, che si seghino, il parallelogrammo rettangolo contenuto dalle porzioni dell'vna, sarà eguale al rettangolo, che vien contenuto dalle porzioni dell'altra. E se i rettangoli contenuti dalle porzioni di due rette, che si seghino saranno eguali; passarà per i quattro termini di quella la circonferenza di vn cerchio.

Eucl. 35. 36. e 37. del 3.

NEl cerchio ABF, le due distese rette linee AEB, e DEC si seghino nel punto E, ò ambe-

bedue seghino la circonferēza del cerchio in due punti, come nella prima, e nella seconda figura, ouerò vna retta AEB la seghi ne' due punti A, e B, e l'altra DEC tocchi la medesima circonferenza in vn punto additato da i caratteri D, e C, come nella terza figura, ò pure ambedue tocchino il cerchio, come nella quarta figura. Dico che il parallelogrammo rettangolo contenuto dalle porzioni AE, EB dell'vna retta linea, è eguale al rettangolo contenuto dalle porzioni DE, & EC dell'altra. Si congiunghino le rette AC, DB. Perche i due angoli EDB, & EAC sono eguali; essendo *a* nella medesima porzione del cerchio CFB, come nella prima, e seconda figura, *b* ò l'angolo EDB è cōtenuto dalla tangente ED, e dalla segante BD, e l'altro angolo EAC è posto nella alterna porzione BFC, come nella terza figura, ò pure *c* amendue gli angoli contenuti dalle tangenti, e dalla medesima segante BC, sono eguali a quello, che può farsi nell'alterna porzione BFC, come nella quarta figura; e sono *d* gli angoli AEC, e DEB eguali alla cima, ò pure vn solo medesimo. Adunque





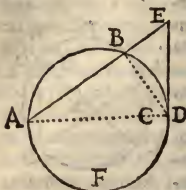
a *prop. 14. del 2.*

b *prop. 24 del 2.*

c *Dalla prop. 24. del 2.*

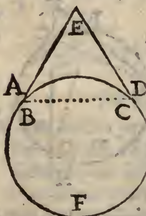
d *Dal Corol. della prop. 5. del 1.*

e Dalla prop.4. di questo.
f Corolar. della pr. 14.di questo.



que e i due triangoli AEC, e DEB sono simili, e però come AE ad EC, così stà DE ad EB. Per la *f* qual cosa il parallelogrammo rettangolo contenuto dalla prima, e quarta delle proporzionali, cioè il rettangolo AEB sarà eguale al rettangolo DEC, che è contenuto dalla seconda, e terza. E se le porzioni di qualsiuoglia di quelle, come CE, & ED saranno eguali, allora il quadrato di CE sarà eguale al rettangolo CED, e perciò il rettãgolo AEB sarà eguale al quadrato di CE.

g Come si fece nella prop. 14. del 2.



Nel secondo luogo le due rette AEB, e DEC, le quali si seghino nel punto E, facciano i rettãgoli AEB, e DEC eguali tra loro, e *g* si tiri per i tre punti A, C, B la circonferenza di vn cerchio. Dico che ella stessa passerà per il pũto D. Perche, se ciò non è vero, passi per il punto H di quà, ouero di là dal punto D. Adunque *h* il rettangolo HEC sarà eguale al rettangolo AEB; ma era il rettãgolo DEC eguale al medesimo rettangolo AEB. Però i rettãgoli HEC, e DEC sono eguali trà loro, la parte, e il tutto, che è impossibile. La circonferenza dun-

h Dalla 1. arte ci questa pr.

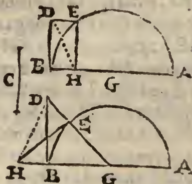
dunque del cerchio ACB non passa per il punto H. Si che passará per i punti A, B, C, e D, come era stato proposto.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA VII.

Date due rette linee, ritrouare vn punto in vna di loro, ò dentro, ò fuori, che faccia due porzioni, trà le quali l'altra linea data sia media proporzionale: Ma fà di mestieri, che la metà della retta linea, dentro la quale deesi segnare il punto non sia minore dell' altra retta linea data.

Sieno le due rette linee AB, e C, deesi ritrouare il pũto dentro la retta linea AB, come nel primo caso, ò fuori di lei in diritto, come nel secondo, di modo che la retta linea C sia media proporzionale trà le fatte porzioni; ma fà di mestieri nel primo caso, che la metà della AB non sia minore della C. Sopra il diametro AB descriuasi il cerchio AEB, il di cui centro G, e dal termine B si *a* tiri la BD perpendicolare alla AB, e si seghi *b* la BD eguale alla C: di poi dal termine D (nel



a Dalla prop. 10. del 1.

b Dalla prop. 3. del 1.

primo caso) si tiri la retta linea DE parallela alla AB, la quale non caderà fuori del cerchio, per essere supposta la metà della AB, cioè il raggio, ouero l'altezza del semicerchio AEB eguale, ò maggiore della C, ò pure della perpendicolare BD; e però la DE toccherà, ò segherà il cerchio nel punto E. Ma nel secondo caso congiungasi la retta DG al centro del cerchio, la quale nel punto E seghi la di lui circonferenza. Si seghi *c* in oltre BH eguale alla DE, e si cõgiungano le rette EH, DH. Perche ne' due triangoli EDH, BHD si sono fatti i due lati BH, e DE eguali, ed è il lato HD comune, & eguali sono trà loro gli angoli compresi EDH, e BHD (perche nel primo caso *d* sono alterni nelle parallele DE, e BA, e nel secondo *e* sono alla base del triangolo iscoscele DGH, auuenga che a i raggi eguali GB, GE si aggiungano le BH, ED eziandio eguali) adunque *f* la base EH è eguale alla BD, ouero alla C, ed è parimente l'angolo DEH eguale all' angolo retto DBH. Si *g* che la HE è perpendicolare alla DE; e perciò nel primo caso *h* la EH sega perpendicolarmente ancora il diametro BA equidistante alla DE; ma nel secõdo caso *i* la HE toccherà il cerchio nel punto E. Adunque *k* il parallelogrammo rettãgolo AHB è eguale al quadrato della retta linea HE. Onde la *l* HE, ouero la C a lei eguale, sarà media proporzionale tra le porzioni AH, & HB; come era stato proposto.

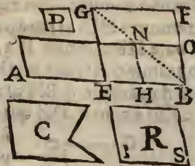
c Dalla prop. 3. del 1.
d Dalla prop. 15. del 1.
e Dalla prop. 6. del 1.
f Dalla prop. 4. del 1.
g Dalla prop. 10. del 1.
h prop. 15 del 1.
i Dalla prop. 21. del 2.
k Dalla pr. 22. di questo.
l Corol. 2. della pr. 14. di qu.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA VIII.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo eguale à vn dato ſpazio rettilineo, che ſia mancante, ò eccedente di vn parallelogrammo, il quale ſia ſimile à vn'altro dato. Ma quando il parallelogrammo da applicarſi dourà eſſer mancante, è neceſſario, che il detto ſpazio non ſia maggiore del parallelogrammo ſimile al dato, deſcritto ſopra la metà. *Eucl. pr. 28. e 29. del 6.*



SIa dato qualſiuoglia ſpazio rettilineo C, & il parallelogrammo D, e la retta linea AB, e ſopra la di lei metà EB ſi faccia *a* il parallelogrammo EF ſimile a D. Deue addattarſi alla retta AB vn parallelogrammo eguale allo ſpazio C, & mancante (nel primo caſo) ma eccedente (nel ſecondo) di vn parallelogrammo, che ſia ſimile à D: ma biſogna nel primo caſo, che lo ſpazio C non ſia maggiore del parallelogrammo EF. Facciaſi *b* il parallelogrammo R ſimile ad EF, ed eguale allo ſpazio C, & il ſuo lato IS ſia omologo ad EB. E perche nel primo caſo ſi pone lo ſpazio

a Dalla prop. 16. di queſto

b Dalla prop. 21. di queſto.

c prop. 17. di questo.
d prop. 23 di questo.
e Dalla stessa.
f Dal Corol. della pr. 16. del lib. 1.
g Dalla prop. 29. del 1.
h Dal Corol. della prop. 16. del 1.
i prop. 29. del 1.
k Dalla prop. 1. di questo.
l Dalla prop 1. di questo.
m Dalla pr. 7. del 3
n Dalla pr. 3. del 3
o Dalla prop. 19. di questo.
p prop. 18 di questo.
q dalla pr. 19, del 3.

zio C, ouero lo a lui eguale parallelogrammo R, non maggiore del parallelogrammo EF. Adunque *c* il lato IS sarà eguale, ò minore del lato a lui omologo EB, cioè della metà di AB. Si che la retta AB *d* può esser segata in H, si come nel secondo caso *e* può esser prodotta, acciòche il rettangolo AHB diuenga eguale al quadrato della retta IS. Di poi dal punto H si tiri *f* la HN parallela alla BF, la quale *g* sarà segata dalla GB, diametro del parallelogrammo nel punto N; e per il punto N si tiri *h* la ON parallela alla AB: e tirando le *i* altre linee parallele, si compisca il parallelogrammo AN. E perche il quadrato *k* di HB al rettãgolo BHA, stà come la BH alla HA (auendo comune l'altezza HB) ed è il parallelogrammo *l* HO, al parallelogrammo AN, come la base HB alla base HA. Adunque *m* il parallelogrammo HO al parallelogrammo AN, stà come il quadrato di BH al rettangolo BHA, ouero allo *n* eguale a lui quadrato della retta IS. Ma il parallelogrãmo EF al parallelogrãmo HO a lui simile, *o* intorno al comune diametro GBN, stà come *p* il quadrato di EB al quadrato di EH. Adunque *q* per la composizione ordinata il parallelogrammo EF al parallelogrammo AN, stà come il quadrato EB al quadrato della retta IS. Ma *r* come il quadrato di EB al quadrato della retta IS, così stà il parallelogrammo EF al paral-

lelo-

lelogrammo R, ouero *s* allo spazio C, eguale a questo. Adunque *t* il parallelogrammo EF hà la medesima proporzione al parallelogrāmo AN, & a lo spazio C; e perciò l'applicato parallelogrammo *u* AN è eguale allo spazio dato C; e *x* manca nel primo caso, e soprauanza nel secondo della figura HO, che è simile alla EF, ouero al dato *y* parallelogrāmo D. Il che bisognaua fare.

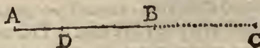
r dalla pr 18 di qu. s dalla pr 3. del 3. t dalla pr 7. del 3. u dalla prop. 4. del 3. x dalla diff. 2. di questo. y Corol. della pr. 16. di qu. Eucl. 11. del 2. e 3. del 6.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA IX.

Segare vna proposta retta linea terminata in due porzioni, l'vna delle quali sia media proporzionale trà tutta la linea, e trà l'altra porzione. E la retta così segata si chiami diuisa, secondo l'estrema, e meza proporzione.

DEesi segare la data retta A B, come viên proposto. Si *a* produca la retta AB in C, in modo, che la stessa AB diuenga media proporzionale trà tutta la prodotta AC, e'l suo slungamento BC, e si *b* seghi la BD eguale alla BC; starà la CA alla AB, come la AB alla BC, ouero *c* alla DB eguale a lei, e comparando le differēzed *d* de' termini a i conseguenti, la CB, ò pure *e* la sua eguale DB, starà al la BA, come la AD alla DB, e perciò la porzione BD sarà media proporzionale trà tutta la linea



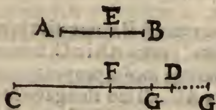
a dalla prop. 23. di questo. b dalla pr. 3. del 3 c dalla pr. 3. del 1 d dalla pr. 3. del 5 e dalla pr. 3. del 5

linea AB, e l'altra sua porzione AD; il che bisognaua fare. Ora la retta AB segata in questa maniera nel punto D, si chiami spartita, secondo la meza, & estrema proporzione.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XVIII.

Pappo pr. 54. del 5. *Se di due rette linee spartite nella medesima proporzione, ve ne sarà vna segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, sarà in cotal maniera segata ancor l'altra; e se di due rette ciascheduna sarà segata secondo l'estrema, e meza proporzione, saranno ambedue spartite nelle medesime proporzioni.*



Sia la AB spartita in *E*, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior proporzione sia A*E*, e come la BA alla A*E*, così stia la DC alla CF. Dico che la CD in F è segata, secondo l'estrema, e meza proporzione. Perche la BA alla A*E*, stà come la DC alla CF. Adunque *a* comparando le differenze de' termini ai conseguenti, sarà la B*E* alla *E*A, come la DF alla FC, & *b* inuertendo starà la A*E* alla *E*B, come la CF alla FD. E perche la AB è spartita in *E*, secondo l'estrema, e meza proporzione, adunque

a dalla prop. 13. del 3
b dalla pr. 9. del 3

la

la *c* A*E* alla *E*B, sta come la BA alla A*E*; ma come la BA alla A*E*, così staua la DC alla CF; però *d* la DC alla CF sta come la A*E* alla *E*B; ma come la A*E* ad *E*B, così fù prouata la CF alla FD. Adunque *e* come la DC alla CF, così sta la CF alla FD; e perciò la CD è segata in F, secondo l'estrema, e meza proporzione.

c dalla prop. 25. di questo.
d dalla pr 7. del 3.
e dalla medesima

Nel secondo luogo sieno segate le due rette AB, e CD, ambedue secondo l'estrema, e meza proporzione ne' punti *E*, & F. Dico che elleno sono segate proporzionalmente. Se questo non è vero sia la CG (maggiore, ò minore di DC) alla CF, come la BA alla A*E*. Adunque come si è detto, *f* conforme la AB in *E*, così la GC in F sarà segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, e perciò *g* il rettangolo FGC sarà eguale al quadrato della media proporzionale CF; ma per l'ipotesi la CF era media proporzionale trà la FD, e la CD; adunque *h* il parallelogrammo rettangolo FDC è eguale al quadrato della medesima CF. Laonde i parallelogrammi rettangoli FGC, & FDC saranno eguali trà di loro, la parte, e'l tutto, il che è falso. Nõ è adũque possibile, che vn'altra GC maggiore, ò minore della DC abbia alla CF la medesima proporzione, che hà la BA alla A*E*; e perciò la stessa DC alla CF, starà come la BA alla A*E*: e *i* le differenze alle conseguenti, cioè B*E* allà *E*A, stara come la DF alla FC; & *k* inuertendo la A*E* alla *E*B, stará come la CF alla FD; per la qual cosa è manifesto quello che si cercaua.

f 1. part. di questa prop.
g Corol. 2 della pr. 14. di qu.
h Del medesimo Coroll.
i prop. 13. del 3.
k prop. 9. del 3.

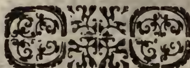
CO-

COROLLARIO.

Da queste due proposizioni si caua, che se ad vna retta linea spartita, secondo l'estrema, e meza proporzione si aggiungnerà vna retta eguale al pezzo maggiore: tutta la linea composta vien segata secondo l'estrema, e meza proporzione, della quale il pezzo maggiore è la retta linea posta dal principio. Imperciòche nella proposizione vinticinque fù segata la AB in D, secōdo l'estrema, e meza proporzione, & aggiunta la BC eguale alla maggiore porzione BD, staua la BD, ouero la sua eguale CB alla BA, come la AD alla DB. Onde così la AB in D, come la CA in B, sono spartite con la proporzione medesima; e perciò come si è dimostrato in questa venseesima proposizione sarà, la retta CA segata in B, secondo l'estrema, e meza proporzione, si come la AB in D, secondo la meza, & estrema proporzione era stata spartita.

Euclid. 5. del 13.

Fine del Libro quarto.



LIBRO QVINTO

Della descrizione, e proprietà di varie figure piane, e loro proporzioni.

Di Eucl. lib. 4. 2. e residuo del 6.

DIFFINIZIONI.

I.

VNa figura rettilinea si dice inscritta nel cerchio, quando tutti i suoi angoli toccano la circonferenza del cerchio: e dicesi circonscritta al cerchio, quando tutti i suoi lati toccano la circonferenza di quello.

II.

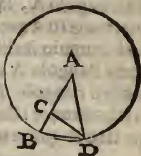
E per il cõtrario dicesi il cerchio inscritto in vna figura rettilinea, quando la sua circonferenza tocca tutti i lati della figura; e dicesi il cerchio circonscritto alla figura rettilinea, quando la circonferẽza di quello tocca tutti gli angoli della figura.



PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

Da vn punto preso in vna data retta linea constituire vn'angolo, che sia la quinta parte di quattro retti.



SOpra la data retta linea AB nel punto suo B, deuesi descriuere vn'angolo, che sia la quinta parte della somma di quattro retti. Diuidasi la retta AB *a* secódo la media, & estrema proporzione in C, la maggior porzione della quale sia AC; e dal centro A, con l'interuallo AB, descriuasi il cerchio BD, nel quale si applichi la retta BD, eguale *b* alla maggior porzione AC. Dico che l'angolo ABD è quello, che si cercaua. Congiunte le rette AD, e CD. Perche *c* le trè rette linee BA AC, e CB son proporzionali, & è la BD eguale alla AC, & il raggio AD eguale ad AB. Adunque ne' triangoli ABD, e DBC intorno *d* a gli angoli eguali ADB, e B opposti a i raggi eguali, la AB, ò pure la AD alla DB, stà come la DB alla BC: però *e* l'angolo CDB sarà eguale all'angolo A; e la AC alla CB stà come la BA alla AC, ò pure come la AD alla DB: adunque *f* l'angolo ADB, ò pure l'eguale a lui B, sarà il doppio dell'angolo CDB, ò pure dell'

a prop. 25 del 4.
b prop. 12 del 2.
c prop. 25 del 4.
d prop. 6. del 1.
e prop. 6. del 4.
f prop. 3. del 4.

dell'angolo A. Laonde di quelle parti delle quali l'angolo A ne è vna, sarà l'angolo B due parti, e ADB altretante; per lo che gli angoli A, B, e ADB insieme presi (i quali g sono eguali a due retti) verranno ad essere eguali a cinque angoli, ciascuno de' quali è eguale ad A; e perciò l'angolo A verrà ad essere la quinta parte di due angoli retti. Ma qual proporzione doppia hà l'angolo B all'angolo A, la medesima aura la somma di quattro retti a quella di due retti; e permuttando *h* l'angolo B alla somma di quattro retti, starà come l'angolo A alla somma di due retti; ma si mostrò l'angolo A esser la quinta parte di due retti; adunque *i* l'angolo *B* sara la quinta parte di quattro angoli retti, come fù proposto.

g *prop.* 18 *del* 1.

h *prop.* 12 *del* 3.

i *Dif.* 8 *del* 3.

COROLLARIO.

Vedesi la maniera di descriuere vn triangolo isoscele, nel quale ciascuno de gli angoli sopra la base sia il doppio del rimanente alla cima.

Eucl. pr. 10. *del* 4.

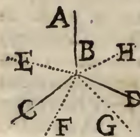


PRO-

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II.

Ritrouare vn' angolo, che sia vna parte quindicesima di quattro retti.



DEuesi fare vn' angolo, che sia vna parte di quelle delle quali la somma di quattro retti ne contiene quindeci. Facciasi *a* l'angolo ABC doppio d'vno de' gli angoli del triangolo equilatero. E perche come due retti à quattro retti, così stà vn'angolo del triangolo equilatero all'ãgolo ABC, per esser gl'antecedenti la metà de i consequenti; permutando *b* come due retti ad vn' angolo del triangolo equilatero, così stanno quattro retti all'angolo ABC: ma vn'*c* angolo del triangolo equilatero è la terza parte di due retti; adunque l'angolo ABC sarà anche la terza parte di quattro retti. Facciasi poi l'angolo CBD anch' egli la terza parte di quattro retti, cioè *d* eguale all' angolo ABC. E perche *e* tutti gli angoli ABC, CBD, e DBA, che stanno intorno al punto B sono eguali à quattro retti, e sono i due angoli ABC, e CBD due terze parti di quattro retti; Adunque il rimanente angolo ABD sarà parimente la terza parte di quattro retti. Si facciano poi *f* gli angoli ABE,

a *prop. 24. del 1.*

b *prop. 12 del 3.*

c *Dalla prop. 18. del 1.*

d *prop. 24 del 1*

e *Dalla prop. 12. del 1.*

f *prop. 1. di questo.*

EBF, FBG, GBH, ciascuno de' quali sia la quinta parte di quattro retti, verrà ad essere (come sopra si disse) il quinto angolo HBA eguale a gli altri, e sarà la quinta parte di quattro retti. E perche l'angolo ABF è eguale all' angolo ABG, essendo ciascun di loro due quinti di quattro retti, e sono i due angoli ABC, & ABD anche eguali trà loro; adunque gli angoli rimanenti CBF, e DBG saranno eguali tra loro: Dopoi perche da gli angoli eguali ABC, e CBD si tolgono via gli eguali angoli ABE, & FBG: adunque il rimanente angolo EBC sarà eguale alle due porzioni rimanenti CBF, e GBD insieme prese; ma si son mostrati gli angoli CBF, e GBD eguali trà loro. Adunque l'angolo EBC sarà il doppio dell' angolo CBF; e tutto l'angolo EBF sarà il triplo dell' angolo CBF. Per la medesima ragione tanto l'angolo ABE, quanto ABH, quanto HBG, e quanto FBG sara eguale al triplo dell' angolo CBF. Per la qual cosa tutti gli angoli FBE, EBA, ABH, HBG, GBF insieme presi, contengono cinque volte la somma di tre angoli, ciascuno de' quali è eguale a CBF cioè quindeci volte contengono il medesimo angolo CBF. E però l'angolo CBF preso quindeci volte, viene ad essere eguale a tutti gli angoli, che si posson fare intorno al punto B, g cioè a quattro retti. Il che si douea fare.

g Dalla prop. 12. del 1.



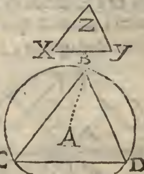
PRO:

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III.

In qualsiuoglia cerchio inscriuere vn triangolo equiangolo ad vn'altro dato; & i poligoni equilateri, & equiangoli di trè, di quattro, di cinque, e di quindeci lati; E qualsiuoglia altri, ne' quali successiuamente si vadano radoppiando i lati. E chiaminsi cotali figure regolari. *D'Eucl. è la 2 6 11. 15.16. del lib. 4.*

NEl cerchio BCD, il cui raggio AB, si deono inscriuere le figure imposte: e prima il triangolo, che sia equiangolo al dato triãgolo ZXY. Taglisi *a* la porzione BDC del cerchio capace di vn'angolo eguale all'angolo Y, e tirisi la retta BC, e nella parte opposta *b* taglisi la porzione BCD capace d'vn'angolo eguale all'X, e si congiungano le rette BD, e CD. E' manifesto, che l'angolo D è eguale alla Y, e l'angolo G è eguale all'X, e però *c* il triangolo BCD inscritto nel detto cerchio, sarà equiangolo al dato triangolo ZXY.



a prop. 26 del 2.

b Per l'istessa.

c Dalla prop. 18. del 1.

Nel secondo luogo volendosi inscriuere nel cerchio il triangolo equilatero, & equiangolo, si douranno diuidere (come si fece nella preceden-



te proposizione) tutti gli angoli al centro, cioè quattro retti in tre angoli BAC, CAD, e DAB, ciascuno de' quali sia eguale alla terza parte di quattro retti; ma volendosi inscriuere il quadrato, si facciano quattro angoli *d* al centro BAC, CAD, DAE, & EAB, ciascuno de' quali sia la quarta parte di quattro retti, cioè sia vn retto: e volendosi inscriuere il pentagono, faccians *e* cinque angoli BAC, CAD, DAE, EAF, & FAB, ciascuno de' quali sia la quinta parte di quattro retti. Finalmente per il quintidecagono, *f* facciansi al centro quindici angoli BAC, CAD, DAE, EAF &c. ciascuno de' quali sia la quindicesima parte di quattro retti. E'manifesto in qualsiuoglia delle dette diuisioni, che tutti gl'angoli al centro sono eguali trà loro; tirinsi ora in tutte i raggi AB, AC, AD, &c. fino alla circonferenza del cerchio ne' punti B, C, D, &c. e si congiungano le rette BC, CD, DE, &c. finche restin compite le figure. Deuesi dimostrare tutti i predetti poligoni essere equilateri, & equiangoli. Perche tutti gli angoli verticali al centro A, quali sono BAC, CAD, &c. si sono fatti trà di loro eguali, e tutti i raggi son-

d *prop.* 10 *del* 1.

e *prop.* 1. *di questo.*

f *prop.* 2. *di questo.*



pa-

parimente eguali. Adunque tutti gli triangoli isosceli BAC, CAD, DAE &c. sono similmẽte eguali, d'eguale altezza, & equiangoli trà di loro, e le loro base BC, CD, DE &c. sono ancor'esse eguali. Per la qual cosa la figura BCDEF &c. sarà cõpresa da lati eguali: E perche tutti gli angoli sopra le basi degli isosceli, quali sono BCA, ACD, CDA, ADE &c. si sono dimostrati eguali trà loro. Adunque due di loro insieme a due altri insieme presi sarãno eguali, e però l'angolo BCD sarà eguale all'angolo CDE: e così tutti gli altri. Laonde qualsiuoglia delle dette figure BCDE &c. inscritta nel cerchio, sarà equilatera, & equiangola.



g prop. 4. del 1.



Dopoi non hà dubbio, che se in qualsiuoglia delle dette figure si diuideranno *h* tutti gli angoli al centro in parti eguali, e quegli di nuouo si diuidano in altre parti eguali, e così successiuamente, e nella circonferenza del cerchio, si tirino linee rette, che suttendano gli angoli eguali al centro, fin tanto, che le figure restino compite,

h prop. 8. del 1.

pite, saranno descritte altre figure equilatere, & equiangole. E cō tal metodo dal triãgolo equilatero partendosi per mezzo i suoi trè angoli al cētro BAC, CAD, DAB, ne verrà la figura esagona, nel secondo luogo il dodecagono, nel terzo la figura di 24. lati, e così di mano in mano. Ma nel quadrato prima ne verrà l'ottangolo poi il sedecagono. Nel pentagono ne vien prima il decagono poi quel di vinti lati &c. finalmente nel quintidecagono ne viene prima la figura di trenta lati, poi quella di sessanta &c. Tutte le quali nella medesima maniera di sopra si dimostraranno equilatere, & equiangole, conforme fù proposto. Ora così fatte figure equilatere, & equiangole chiaminsi regolari di nota descrizzione.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA VI.

Euclid. 7. 12. del 4. *A vn dato cerchio circonscriuere vn triangolo equiangolo ad vn'altro dato, e qualsiuoglia poligono regolare di nota descrizzione.*

SIa dato il cerchio ABC, il cui centro F. Deuesi ad esso circonscriuere vn triangolo, che sia equiãgolo ad vn dato triangolo ZXY, e qualsiuoglia altro poligono regolare di nota descrizzione. Si descriua nel detto cerchio *a* il triangolo ABC equiangolo al dato triangolo ZXY, ò

a prop. 3. di questo.

pure

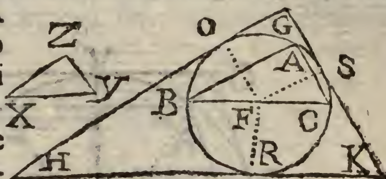
pure vi s'inſcriua vn poligono, quale dee eſſer quello, che ſi hà da circonſcriuere, e dal centro F cadano *b* le FO, FR, FS &c, perpendicolari ſopra i lati AB, BC &c. le quali ſeghino la circonferenza ne i punti O, R, S &c. e per queſti punti ſi tirino *c* le rette linee HG, GK &c. che tocchino il cerchio, e diſtendanſi fin à tanto, che ſi finiſca la figura circonſcritta: e poiche alle medeſime tangenti *d* ſono perpendicolari i medeſimi raggi, à i quali erano perpendicolari le applicate nel cerchio.

b *prop.* 11 *del* 1.

c *Dalla prop.* 21. *del* 2.

d *prop.* 23 *del* 2.

Adunque *e* le AB, e GH ſono parallele trà di loro, e parimente le BC, HK, e così le altri ſarãno equidiſtanti: e però *f* formeranno l'angolo GHK eguale all'angolo ABC, e ſimilmente l'angolo G moſtreraſſi eguale all'angolo A, e l'angolo K eguale all'angolo C, e così tutti gli altri. Per la qualcoſa il triangolo circonſcritto GHK ſarà equiangolo al dato triangolo ZXY, e la figura circonſcritta GHKN ſara equiangola, eſſendo tutti i ſuoi angoli eguali à quelli della figura regolare inſcritta ABCE.



e *prop.* 16. *del* 1.

f Dalla prop. 7. *del* 4.

Di poi ne i poligoni tirate le rette linee FG, & FA. Perche ne' triangoli GOF, & VGF, *g* due lati GO, e GV ſono eguali (per eſſer lati d'eguali quadrati delle tangenti, tirate dal medeſimo pun-

g *Dalla prop.* 22. *del* 4.

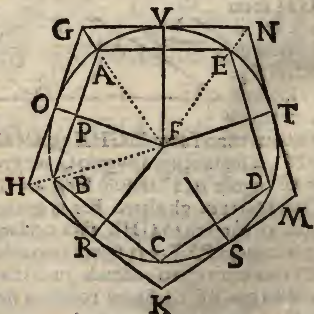
to G) & i raggi FO, FV sono trà loro eguali, ed il lato FG è comune. Adunque *h* gli angoli OGF, & VGF sono trà loro eguali. Ma *i* la retta linea FA diuide parimente per il mezo l'angolo BAE della figura inscritta, e mostrossi l'angolo BAE eguale all'angolo HGN. Adunque le loro metà, cioè gli angoli HG F, e BAF saranno eguali, & è la HG parallela alla BA; adūque *k* la GF sarà parallela alla AF, e concorrono nel pu nto F, adunque *l* FAG è vna sola linea retta, che dal centro passa per gl'angoli dell'vna, e l'altra figura. Per

h prop. 7. del 1.

i Dalla pr. 3. di questo.

k Dalla prop. 7. del 4.

l Dalla prop. 17. del 1.



la medesima ragione sarāno linee rette le FBH, FCK, FDM &c. le quali dal centro passano per gl'angoli dell'vna, e dell'altra figura. Poi perche la BA è parallela alla HG base del triangolo HFG,

HFG, adunque *m* la AB alla GH, stà come la BF alla FH: per la stessa ragione la BC alla HK starà come la medesima BF alla stessa FH; e perciò *n* come la BA alla HG, così starà la BC alla HK: e sono le antecedenti AB, e BC eguali nel poligono regolare inscritto; adunque *o* anche le conseguenti GH, & HK sono eguali tra di loro. Per la stessa ragione i lati KM, MN, NG saranno eguali tra di loro, & a i precedenti GH, NK. Per la qual cosa la figura GHKN sarà equilatera; e si mostrò prima equiangola; adunque *p* la figura circonscritta GHM è regolare, quale si richiedeua.

m *Dalla pr. 6. del 4*

n *prop. 7. del 3.*

o *Dalla prop. 16. del 3.*

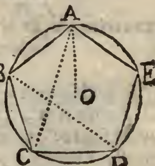
p *prop. 3. di questo.*

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA V.

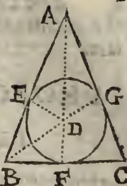
A qualsiuoglia triangolo, ò à qualsiuoglia poligono regolare circonscriuere vn cerchio.

Eucl. 5. 9. e 14. del lib. 4.



Sia qualsiuoglia triangolo, ò poligono regolare ABC. Deuesi ad esso circōscriuere vn cerchio. Tirata la retta AC nel poligono intorno al triangolo ABC descriuasi il cerchio, il cui centro sia O, nella stessa maniera, che si fece nella terza parte della proposizione quattor-

le perpendicolari DE, DF, e DG sopra i lati del triangolo. Perche ne' triangoli DBF, e DBE, i due angoli in B si sono fatti eguali, & i due angoli ad E, & F son retti, cioè ancora eguali, & il lato DB è comune, & opposti à gli angoli retti. Adunque *c* la DF e eguale alla DE. Per la medesima ragione ne' triãgoli DEA, e DGA, i lati DG, e DE saranno eguali trà di loro. Perloche le trè perpendicolari DF, DE, e DG (le quali sono le distanze del punto D da i lati del triangolo) saranno trà di loro eguali. Secõdariamente al poligono regolare si circonscriua il cerchio, *d* il di cui centro è D: e perche nel cerchio ABN le rette applicate AB, BC, CN &c. sono eguali trà di loro, saranno dunque egualmente *e* distanti dal centro D, e perciò le perpẽdicolari tirate DG, DE, DF, &c. saranno tra di loro eguali, come erano eguali nel triangolo. Ora dal centro D col raggio DE descritto il cerchio EFG, passarà necessariamẽte per i punti FG, &c. e *f* toccherà i lati delle figure ne' punti E, F, G, auuenga che i raggi DE, DF, DG, &c. sono perpẽdicolari a i lati AB, BC, &c. Laonde *g* il cerchio





c prop. 25 del 1.

d prop. 5. di questo.

e prop. 10 del 2.

f prop. 23. del 2.

g Dif. 2. di questo.

EFG

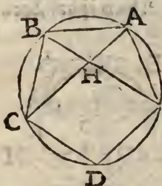
EFG è inscritto alla figura ABC. Il che bisognaua fare.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA I.

Euclid. 8. del 13.

In vn pentagono regolare due rette linee suttendenti, gli angoli della figura si seghino scambieuolmente, secondo l'estrema, e meza proportione: e le maggiori loro porzioni saranno eguali al lato del pentagono.

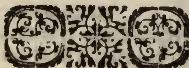


Sia il pentagono regolare ABD, e le due rette linee AC, BE sottendano gli angoli ABC, e BAE della figura, e si seghino nel punto H. Dico tanto la CA, quanto la EB esser segate nel punto H, secondo l'estrema, e meza proporzione, e le loro maggiori porzioni CH, e EH essere eguali à qualsiuoglia lato del pentagono BA. Si circonscriua il cerchio *a* ABD al pentagono. Perche *b* nel quadrilatero BEDC inscritto nel cerchio, i due angoli opposti CBE, e D insieme presi sono eguali a due retti, & è *c* l'angolo BCD eguale all'angolo D nel pentagono regolare. Adunque i due angoli EBC, e BCD insieme presi sono eguali a due retti; e perciò *d* le due

a prop. 5. di questo.
b prop. 15 del 2.
c prop. 3. di questo.
d prop. 16 del 1.

due rette BE, e CD sono trà di loro parallele. Per la medesima ragione sono anche parallele la CA, e la DE. Laonde e CHED sarà parallelogrammo, nel quale i lati opposti CH, e DE saranno eguali, e così la HE sarà eguale alla CD, ouero a qualsiuoglia altro lato BA. In oltre perche gli angoli BAC, & AEB insistono sopra circonferenze eguali BC, & AB; adũque gli angoli f BAC, & AEB sono eguali, & è l'angolo ABE comune. Adunque g i triangoli EBA, & ABH sono simili, e perciò la EB alla BA starà come la AB alla BH; ma dimostrossi la HE eguale alla BA. Adunque h tutta la BE alla HE, stà come la HE alla HB; e perciò i la BE è segata nel punto H, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione HE è eguale alla BA lato del pentagono. Il medesimo conchiuderassi della suttesa CA. Laonde è chiaro &c.

e prop. 26 del 1.
f prop. 17. del 2.
g prop. 4. del 4.
h prop. 3. e 7. del 3.
i prop. 25. del 4.



PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA II.

Se delle figure regolari inscritte nel medesimo cerchio al lato dell'esagono si agiugnerà, ò pure si leuerà via il lato del decagono; ne verrà vna retta linea segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, e la porzione maggiore della composta sarà il lato dell'esagono, e la maggior porzione della scemata sarà il lato del decagono.

Di Eucl. la 9. del 13.

E
H
B
A
D
C

NEl cerchio ABC sia la retta linea AB lato del decagono regolare, & à questa si aggiunga dirittamente la BE *a* eguale al lato dell'esagono regolare inscrittibile nel medesimo cerchio. Dico la retta AE esser segata nel punto B, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione sarà EB. Si tirino le rette dal centro DA, DB, e DE. Perche il lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio, è base del triangolo isoscele, il qual hà *b* la cima nel centro del cerchio; & è tale angolo al centro la sesta parte di quattro retti, ouero la terza parte di due retti, qualsiuoglia *c* dũque de gli angoli eguali alla base di detto

a prop. 3. di questo.

b dalla prop. 3. di questo.

c dalla prop. 18. del 1.

to isoscele, sarà la terza parte di due retti; per lo che cotal triangolo isoscele sarà equiangolo, e perciò equilatero. Si che la di lui base, ouero il lato dell'esagono sara eguale al raggio del cerchio, al quale s'inscriue l'esagono, e per questo la BE lato dell'esagono inscritto nel cerchio ABC sarà eguale al raggio del cerchio DB. E perche *d* l'angolo al centro ADB, al quale è suttesa la AB lato del decagono regolare è la decima parte di quattro retti, ouero la quinta parte di due retti, & i trè *e* angoli del triangolo isoscele ADB sono eguali a due retti. Adunque qualsiuoglia angolo DBA alla base è eguale à due quinti di due retti, e perciò l'angolo DBA è doppio dell'angolo ADB; ma l'angolo *f* ABD esteriore nel triangolo DBE è eguale à i due interiori, & oppostì angoli BDE, & E (i quali *g* sono eguali, essendo i suttendenti lati EB, BD eguali, cioè raggi del cerchio). Adunque l'angolo ABD è il doppio dell'angolo E, conforme di sopra era il doppio dell'angolo *h* ADB; e perciò gli angoli E, e BDA sono eguali tra di loro, & è l'angolo A comune. Adunque *h* i due triangoli EDA, e DBA sono simili, e perciò la EA alla AD stà come la DA alla AB; & è la EB eguale al raggio DA; onde come prima la AD, così adesso la EB sara media proporzionale fra la EA, e la BA; e per questo *i* la EA sarà segata nel punto B, secōdo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione sara la EB lato dell'esagono, e la minor porzione sarà la BA lato del decagono delle rego-

d *Dalla prop. 3. di questo.*

e *prop. 18. del 1.*

f *prop. 18. del 1.*

g *prop. 6. del 1.*

h *Dalla prop. 4. del 4.*

i *prop. 25. del 4.*

go-

golari inscritte nel medesimo cerchio.

Secondariamente dal lato dell'esagono E*B*, ouero dal raggio del cerchio, si leui via la retta *B*H eguale alla *B*A lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio. Dico la E*B* esser segata nel punto H, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione sarà *B*H lato del decagono. Imperciòche della E*B* maggior porzione della EA segata secondo l'estrema, e meza proporzione, si leua via la *B*H eguale alla porzione minore *B*A. Adunque *k* ancora la *B*E vien segata secondo l'estrema, e meza proporzione, la porzion maggiore della quale sarà *B*H. Il che bisognaua dimostrare.

k *Si caua dalla prop. 25. del 4.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA VII.

Ascriuere in vn dato cerchio due figure regolari simili trà di loro; di modo, che la differenza della circonscritta, ò pure dell'inscritta dal cerchio sia minore di qualsiuoglia grandezza proposta.

Di Archimede pr. 2 del lib. 1. della sfera, e Cilindro.

Sia il dato cerchio A*B*C, e qualsiuoglia superficie X di qualunque piccolezza. Deuono ascriuersi nel cerchio le proposte figure. Si *a* circonscriua al cerchio A*B*C il quadrato EH, & al contatto A si congiunga il raggio DA: e qual proporzione ha il quadrato, *b* che sia eguale allo spazio X, insieme col quadrato EH al quadrato EH,

a *prop. 4 di questo.*

b *prop. 11 del 4.*

EH, così *c* si faccia il quadrato del raggio AD al quadrato della retta linea DG; e dal punto *d* G si tiri la retta GN perpendicolare al diametro, che seghi la circonferenza in N; e *e* si seghi in parti eguali la circonferenza del semicerchio ACB, e di poi in altre parti eguali, e così sempre fino à tanto che l'arco *f* AF sia minore dell'AN: e *g* si seghi l'arco AO eguale all'AF, e si congiunga la retta FO, *h* la quale sarà segata per mezo, e perpendicolarmente dal raggio AD nel punto K. E perche le trè rette SA, FK, NG sono perpendicolari al raggio DA, *i* saranno trà di loro parallele; ma il punto F cade trà le estreme parallele AS, GN; auuenga che l'arco NA è maggiore dell'arco FA. Adūque il punto K cade trà i punti A, e G; e perciò la retta DK sarà maggiore della DG; e sì come la AF misura la meza circonferenza AFB; *k* così OF doppia di AF misurerà tutta la circonferenza del cerchio. Si spartisca ora

c Dalla prop. 18. del 4.
d prop. 10 del 1.
e Dalla prop. 19. del 2.
f Dalla prop. 27. del 2.
g Dalla prop. 16. del 2.
h prop. 19 del 2.
i prop. 14. del 1.
k *Ass.* 1. del 3.

tutta la circõferenza del cerchio nelle parti CF, FO, OP, PQ, &c. eguali trà di loro; e si congiungano le rette linee CF, FO, OP, PQ, &c. *l* e si tirino le tangenti SR, RT, TL, &c. parallele à quelle fino à che si *m* compiscono le figure regolari simili la circonscritta SRTV, e la inscritta CFOPB. È manifesto, che il lato RS al suo omologo OF, stà come il raggio DA al DK, e però le figure simili sopra i detti lati, similmente descritte, saranno proporzionali. Laonde la figura SRTV alla figura CFOPB, starà come il quadrato della DA al quadrato della DK: mà *n* il medesimo quadrato della DA al quadrato della maggiore DK, hà minor proporzione, che al quadrato della minore DG; e come il quadrato della DA al quadrato della DG, così staua la sõma dello spazio X, e del quadrato EH al quadrato EH. Si *o* che la figura SRTV alla figura CFOPB hà minor proporzione, che la somma dello spazio X, e del quadrato EH al quadrato EH: e la *p* differenza delle figure SRTV, e CFOB alla figura CFOB, hà minor proporzione, che non hà lo spazio X al quadrato EH: ma il medesimo spazio X *q* alla figura inscritta CFOB, hà maggior proportione che al quadrato circonscritto EH (essendo questo maggiore di quello). Adunque la differenza delle figure SRTV, e CFOB alla figurà CFOB, hà minor proporzione, che lo spazio X alla medesima figura inscritta CFOB; e perciò *r* la differenza delle figure SRTV, e CFOB sarà minore dello spazio X. Ed essendo *s* il cerchio

l *Corol. della pr.* 15. *di questo.*
m *Dalla prop* 4. *di questo, e dalla pr.* 18. *del* 4.
n *prop.* 2. *del* 3.
o *prop.* 6. *del* 3.
p *Corol. della pr.* 14. *del* 3.
q *prop.* 2. *del* 3.
r *prop.* 5. *del* 3.
s *Ass. di questo.*

chio ABC maggiore della figura inſcritta CFOB, e minore della figura circonſcritta SRTV, l'eceſſo della figura circonſcritta ſopra il cerchio, ouero il difetto delle figura inſcritta dal medeſimo cerchio, sarà minore della differenza della circonſcritta figura SRTV, e dell'inſcritta CFOB. Ma la differenza di queſte figure aſcritte ſi è dimoſtrata minore della grandezza X. Adunque la differenza della circonſcritta figura SRTV, ouero della inſcritta CFOB dal medeſimo cerchio ABC è minore di qualunque grãdezza propoſta X. Il che douea farſi.

PROPOSIZIONE X.

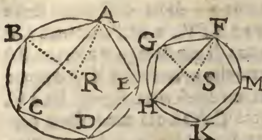
TEOREMA III.

I poligoni ſimili, ò circonſcritti, ò pure inſcritti ne i cerchi, anno duplicata proporzione di quella de i loro raggi. *D'Eucl. 1. del 12.*

SIeno i due poligoni ſimili ABD, e FGK inſcritti, ò pure circõſcritti ne'cerchi, i cẽtri de'quali ſieno R, & S. Dico che gl'inſcritti trà di loro, ouero i circonſcritti anno duplicata proporzione di quella de i raggi de'medeſimi cerchi. E primieramente negli inſcritti ſi tirino le rette AC, HF ſottendenti gli angoli eguali B, e G, e ſi cõgiungano i raggi RA, RB, e SF, & SG. Perche intorno a gli angoli eguali B, e G, i lati AB a BC, & FG a GH ſono proporzionali (per cagione della

similitudine delle figure). Adunque *a* i triangoli ABC, FGH sono simili; e perciò gli angoli ACB, & FHG sono eguali; ma *b* gli angoli al centro R, & S sono doppi degli angoli alla circonferenza ACB, & FHG; adunque gli angoli R, & S sono eguali, e intorno a loro i lati, ouero raggi de i cerchi sono nella medesima proporzione di egualità. Adunque *c* i triangoli ABR, & FGS sono simili; e perciò *d* come la AB alla FG, così sarà il raggio AR allo FS, e *e* saranno ancora medesime le loro duplicate proporzioni. Ma il *f* poligono ABD al poligono FGK, hà duplicata proporzione di quella del lato AB al suo omologo FG. Adunque *g* la proporzione del poligono ABD al poligono FGK è duplicata della proporzione del raggio AR al raggio FS.

a prop. 6. del 4.
b prop. 13 del 2.

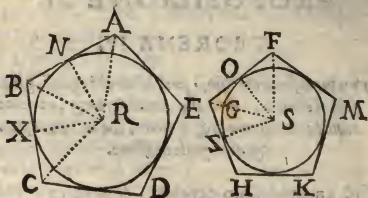


c prop. 6. del 4.
d dalla prop. 4. del 4.
e Dalla prop. 19. del 3.
f prop. 17. del 4.
g prop. 4. del 3.

Secondariamente nelle figure circonscritte da gli angoli eguali A, & F, e da gli eguali B, e G à i centri, si congiungano le rette AR, FS, BR, GS, & a i contatti N, O, X, Z, si congiungono i raggi NR, OS, XR, ZS. Perche *h* le due BN, BX sono eguali, essendo lati degli eguali quadrati delle tangenti, tirate dal medesimo punto, e i due raggi NR, XR sono ancora eguali, & RB comune. Adunque *i* ne due triangoli BNR, e BXR, i due

h Dalla prop. 22. del 4.
i prop. 7. del 1.

due angoli RBN, & RBX sono eguali, e perciò l'angolo RBN sarà la meta dell'angolo ABC. Per la medesima ragione l'angolo RAN sarà la metà dell'angolo BAE; e parimente nell'altra figura l'angolo SGO, sara la metà dell'angolo FGH



del poligono; parimente l'angolo SFO sarà la metà dell'angolo GFM. E perche i due angoli RAN, & SFO sono eguali, essendo la metà degli angoli eguali BAE, & GFM; e i due *k* angoli retti ad N, & O sono eguali: adunque *l* i due triangoli ANR, & FOS sono simili; e perciò *m* la AN alla FO, starà come la NR alla OS. Per la medesima ragione i due triangoli BNR, & GOS saranno simili, e per questo *n* la BN alla GO, sarà come la medesima NR alla medesima OS. Per la qual cosa *o* le due linee AN, & NB insieme alle due FO, & OG, cioè il lato AB al lato FG, starà come il raggio NR al raggio OS, e le *p* loro duplicate proporzioni saranno ancora le medesime.

k prop. 23 del 2.
l prop. 4. del 4.
m prop. 4. del 4.
n Dalla prop. 4. del 4.
o prop. 15 del 3.
p Dalla prop. 19. del 3.

Laonde, come sopra, il poligono ABD al poligono FGK, auerà duplicata proporzione di quella che ha il raggio NR al raggio OS. Il che conueniua dimostrare.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA IV.

Eucl. 33. del. 6. *In vn medesimo cerchio, ò pure in cerchi eguali, gli angoli al centro, ouero alle circonferenze, e i settori anno la medesima proporzione, che le circonferenze alle quali insistono.*

IN vn medesimo cerchio, ò pure in cerchi eguali sieno primamente i due angoli al centro ABC, & EBG insistenti alle circonferenze AC, & EG. Dico che la medesima proporzione hà l'arco AC all'arco EG, che hà l'angolo ABC all'angolo EBG. Si seghi *a* l'arco EG in parti eguali, ed in parti eguali di nuouo, e così di mano in mano si soddiuidano gli archi interposti, fino *b* che si giunga all'arco EM, il quale sia minore di qualunque arco, che si possa assegnare. E nell'arco CA si *c* pigli l'arco CS moltiplice dello EN, di maniera, che il di lui eccesso, ouero difetto SA dalla AC sia eguale, ò minore dell'EM, e perciò sarà minore di qualunque grandezza data; e si congiunghino i raggi BM, BS. Perche quante *d* volte l'arco EM misura l'arco EG, tante volte l'angolo EBM misura l'angolo EBG, e pari-

a Dalla prop. 19. del 2.
b Dalla prop. 27. del 2.
c dalla prop. 16. del 2.
d Corol. dalla pr. 17. del 2.

parimente quante volte l'arco EM misura l'arco CS, tante volte l'angolo EBM misura l'angolo SBC. Adunque *e* l'arco SC sarà le medesime parti dell'arco EG, si come l'angolo SBC è parti dell'angolo EBG. E perche se *f* l'arco SC è eguale allo AC, l'angolo SBC è necessariamẽte eguale all'angolo ABC (& all'ora è manifesto ciò, che si propose). Ma se *g* l'arco SC è maggiore dell'AG, l'angolo SBC insistente alla maggiore circõferenza, sarà necessariamẽte maggiore dell'angolo ABC; e se l'arco SC sarà minore dello AC, sarà l'angolo SBC minore dell'angolo ABC. Laonde ci sono quattro grandezze: la prima è l'arco AC, la seconda l'arco EG, la terza l'angolo ABC, e la quarta l'angolo EBG; e di più due altre grandezze, cioè l'arco SC, e l'angolo SBC sono le medesime parti delle conseguenti, cioè a loro anno la medesima proporzione, e sono insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti, di modo che lo eccesso, ouero il diffetto della prima è minore di qualunque assegnabile quantità. Adunque *h* l'arco AC all'arco EG, stà come l'angolo ABC all'angolo EBG. Il che facea di mestieri dimostrare.



e Diff. 6. del 3.
f Dalla prop. 17. del 2.
g Dalla stessa.
h prop. 24 del 3.

Secondariamente sieno alla circonferenza i due angoli ADC, & EDG insistenti alle circonferenze AC, & EG del medesimo, ouero de' cerchi eguali. Dico che l'angolo ADC all'angolo EDG, stà come l'arco AC all'arco EG. Si facciano gli angoli al centro ABC, & EBG. Perche
i prop. 13 del 2. *i* l'angolo ADC è la metà dell'angolo al centro ABC, e l'angolo EDG è la metà dell'angolo EBG. Adunque *k* come l'angolo ABC all'angolo
k prop. 11 del 3. EBG, cosi sta l'angolo ADC all'angolo EDG; ma come l'angolo ABC all'angolo EBG, così sta la circonferenza AC alla circonferenza EG (per la prima parte di questa proposizione). Adunque *l* come l'angolo ADC all'angolo EDG,
l prop. 7. del 3. così stà la circonferenza AC alla circonferenza EG. Il che bisognaua prouare nel secondo luogo.

Nel terzo luogo nel medesimo, ouero ne' cerchi eguali. Dico che il settore ABC al settore EBG, hà la medesima proporzione, che l'arco AC, che è la base del primo, all'arco EG, che è la base dell'altro settore. Fatta la costruzzione, come sopra, s'intendono dette de' settori tutte quelle cose, le quali dette si sono de gli angoli al
m Dif. 6. del 3. centro. Per la qualcosa *m* il settore SBC sarà le medesime parti del settore EBG, quali parti è l'angolo SBC dell'angolo EBG, ò pure quali parti è l'arco SC dell'arco EG. Di più *n* l'arco SC
n Dalla prop. 17. del 2. dell'arco AC, e il settore SBC del settore ABC saranno insieme maggiori, ò pure insieme minori. Laonde ci sono quattro grandezze, cioè l'arco AC, l'arco EG, il settore ABC, & il settore EBG, e due

e due altre, cioè l'arco SC, & il settore SBC sono le medesime parti delle conseguenti, cioè dell'arco EG, e del settore EBG, le quali sono denominate dal numero, che ne viene per il continouo spartimento delle conseguenti; & insieme eccedono, ouero insieme mancano dalla prima, e dalla terza, cioè dall'arco AC, e dal settore ABC, e l'eccesso della SC dalla prima AC, ò pure il diffetto è minore di qualsiuoglia dato. Adunque *o* l'arco AC all'arco EG, hà la medesima proporzione, che il settore ABC al settore EBG. Il che doueasi vltimamente dimostrare. o *prop. 24 del 3.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA V.

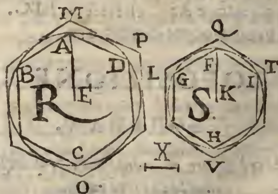
I cerchi trà di loro anno duplicata proporzione di quella de i loro raggi. *Di Eucl. la 2. del 12.*

Sieno due cerchi R, & S, i raggi loro AE, & FK. Dico che il cerchio R al cerchio S, hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio AE al raggio FK, ò pure la medesima, che hà il quadrato di AE al quadrato di FK. Si *a* ascriuano nel cerchio R due poligoni regolari simili ABCD, & MNOP, di modo che l'eccesso della figura MNOP circonscritta sopra il cerchio, & il diffetto della figura ABCD inscritta dal medesimo cerchio R, sia minore di qualunque grandezza proposta. Si ascriuano *b* in oltre a *prop. 9. di questo.* b *Dalla prop. 4. di questo.*

al

al cerchio S due figure FGHI, e QLVT simili alle figure ABCD, & MNOP. E manifesto, che c le simili figure circonscritte MNOP, e QLVT tra di loro, e parimente le simili figure inscritte ABCD, & FGHI auranno trà di loro duplicata proporzione di quella del raggio EA al raggio KF, ò pure staranno come il quadrato di AE al quadrato di FK. E perche il cerchio S è minore

c prop. 10. di questo.



del poligono TQV a lui circonscritto. Adunque d il poligono MNO al cerchio S, hà maggior proporzione, che al poligono TQV: ma il poligono MNO al poligono TQV, hà la medesima proporzione, che hà il quadrato di AE al quadrato di FK. Adunque il poligono e MNO (cioè la quantitá eccedente il cerchio R d'vn' eccesso minore di qualunque dato) hà maggior proporzione al cerchio S, che il quadrato di EA non hà al quadrato di FK. Similmente perche il cerchio S è mag-

d prop. 2. del 3.

e prop. 6. del 3.

è maggiore del poligono a lui inscritto FGH. Adunque il poligono *f* ABC al cerchio S, ha minor proporzione, che al poligono FGK: ma il poligono ABC al poligono FGH, hà la medesima proporzione, che il quadrato di AE al quadrato di FK. Adunque il poligono inscritto *g* ABC (minore del cerchio R d'vn diffetto minore di qualunque assegnato) hà minor proporzione al cerchio S, che il quadrato di AE al quadrato di FK; e perciò *h* il cerchio R al cerchio S, starà come il quadrato di AE al quadrato di FK, cioè auerà duplicata proporzione del raggio AE al raggio FK. Il che bisognaua dimostrare.

f prop. 2. del 3.

g prop. 6. del 3.

h Schol. della pr. 24. del 3.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA VI.

Il cerchio è eguale al triangolo, la di cui base è eguale alla circonferenza, e l'altezza al raggio dello stesso cerchio.

D'Archimede della misura del cerch. prop. 1.

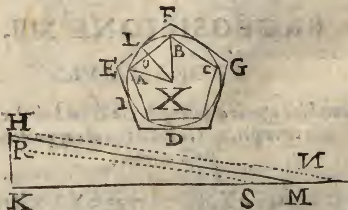
SIa il cerchio X, il di cui raggio XB, & il triangolo HKM, la base del quale KM sia eguale all'intiera circonferenza ABD, e l'altezza, ouero la perpendicolare HK sia eguale al raggio del cerchio XB. Dico che il cerchio è eguale al triangolo HKM. Si ascriuano *a* al cerchio X due poligoni regolati, e simili trà loro EFG fuori, & ABC dentro lo stesso, di maniera che la loro differenza dal cerchio sia minore di qualunque asse-

a prop. 9. di questo.

gna-

gnata grandezza. Di poi *b* tirata la XO perpendicolare dal centro al lato della figura inscritta, e si congiungano le rette XF, XE, & XA, e si *c* faccia KN eguale al perimetro del circonscritto poligono EFGI, e KS eguale al perimetro della figura ABCD, & RK eguale alla perpendicolare XO, e si congiungano le rette HN, & RS. Perche *d* il poligono regolare EFGI può diuidersi in tanti triangoli isosceli eguali trà di loro (i quali anno la cima nel centro X, vno de' quali è XFE) quanti sono i di lui lati, e sono i detti triangoli egualmẽte alti, perche le loro altezze sono i rag-

b prop. 11 del 1.
c prop. 3. del 1.
d Dalla prop. 3. di questo.



gi eguali all'XL, ouero all'HK. Adunque *e* il poligono EFGI è tanto moltiplice del triangolo EXF, quanto il perimetro del medesimo poligono è moltiplice d'vn lato EF; ma KN è eguale al perimetro EFGI del detto poligono. Adunque *f* come KN ad EF, così stà il poligono EFGI al triangolo EXF; ma *g* il triangolo KHN al triango-

e Dif. 5. del 3.
f prop. 5. del 3.
g prop. 1. del 4.

lo

lo EFX (auendo eguali altezze, cioè le perpendicolari XL, & HK) stà come la base KN alla base EF. Sicheh il poligono EFGI, & il triangolo KHN anno al triangolo EXF la proporzione medesima; e perciò i eglino sono eguali trà di loro. Di poi perche le rette k linee inflesse IEL cadenti fuori del cerchio, sono maggiori dell'arco IAL. Adunque il perimetro della figura FGI sarà maggiore di tutta la circonferenza del compreso cerchio X: ma si pose KN eguale al perimetro EFGI, e KM eguale alla circonferenza del cerchio X. Adunque KN è maggiore di KM. Ma i triangoli HKN, & HKM sono egualmente alti: perciò il triangolo l HKN sarà maggiore del triangolo HKM; si come il poligono EFGI è maggiore del cerchio X; dimostrerassi similmente il poligono ABCD eguale al triangolo RKS, auuenga che la base m KS si pone eguale al perimetro del detto poligono, e le altezze RK, XO sono ancora eguali; & n il perimetro del poligono ABCD inscritto, ouero la KS eguale à lui, è minore della circonferenza del cerchio X, ouero della KM eguale a lei, e l'altezza RK, ouero XO è minore dell'altezza HK, ouero del raggio. XL. Adunque il triangolo RKS è minore del triangolo HKM, sì come il poligono ABCD è minore del cerchio X. Ora essendo il poligono FEG eguale al triangolo HKN, & l triangolo HKN maggiore del triangolo HKM. Adunque la circonscritta figura FEG (la quale è maggiore del cerchio X d'vn'eccesso minore di qualũque dato) è ezian-

h prop. 7. del 3.
i prop. 4. del 3.
k Assio. di questo.
l Dalla prop. 32. del 1.
m prop. 1. del 4.
n Ass. di questo.

eziandio maggiore del triangolo HKM. Et essendo similmente la figura ABD eguale al triangolo RKS, & il triangolo RKS minore del triangolo HKM. Adunque la inscritta figura ABD (la quale è minore del cerchio X d'vn difetto minore di qualũque dato) è minore eziandio del triangolo HKM; e per questo o il cerchio X è eguale al triangolo HKM. Il che bisognaua &c.

o Scolio della 24. del 3.

COROLLARIO.

Quindi è, che il triangolo, la di cui base sia eguale al perimetro di qualsiuoglia figura regolare, e l'altezza sia eguale alle perpendicolare tirate dal cẽtro della figura al di lui lato; è eguale alla medesima figura regolare. Poiche si è dimostrato il triangolo KHN (che hà le dette cõdizioni) eguale al poligono regolare EFGI.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA VII.

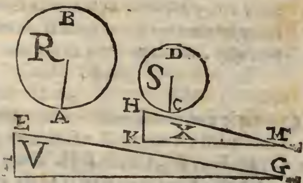
Di Pappo la 11. del 5.

Le circonferenze ánno trà di loro la medesima proporzione, che i raggi de i medesimi cerchi.

SIeno i cerchi R, & S, i raggi de' quali RA, SC. Dico che il raggio RA al raggio SC, stà come la circonferenza ABA alla circonferenza CLC. S'intenda il triangolo V, la cui base FG sia eguale alla circõferenza ABA, e l'altezza EF

egua-

eguale al raggio RA. S'intenda similmente il triangolo X, la di cui base *KM* sia eguale alla circonferenza CDC, e l'altezza H*K* sia eguale al raggio SC. E manifesto, *a* che il triangolo V è eguale al cerchio R, & il triangolo X è eguale al cerchio S; e perciò *b* il triangolo V al triangolo X, starà come il cerchio R al cerchio S. E perche il cerchio *c* R al cerchio S hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio RA al raggio SC. Adunque *d* il triangolo V al triangolo X hà duplicata proporzione di quella, che hà RA ad SC; ouero *e* duplicata di quella, che hà l'altezza EF all'altezza H*K* (essendo fatte eguali RA, & EF frà di loro, & SC, H*K* trà di loro) ed essendo *f* la proporzione del triangolo V al triangolo X composta della proporzione del lato EF al lato H*K*, e della proporzione della base FG alla base *K*M intorno a gli angoli retti F, *K* eguali. Adunque *g* la proporzione della base FG alla base *K*M, è la medesima che quella di EF alla H*K*, ouero *h* che ha la RA alla SC. Ed è la FG eguale alla circonferenza ABA, e *K*M eguale alla circonferenza CDC.



a prop. 13. di questo.

b prop. 3. del 3.

c prop. 12. di questo.

d prop. 7. del 3.

e prop. 3. del 3.

f prop. 15. del 4.

g Dalla prop. 19. del 3.

h prop. 3. del 3.

Adun-

i prop. 7. del 3. Adunque *i* la circonferenza ABA alla circonferenza CDC, há la medesima proporzione, che il raggio RA al raggio SC; come douea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA VIII.

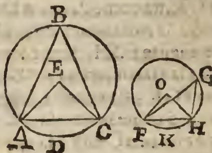
Di Pappo la 13. del 5.

Se le porzioni di due cerchi conterranno angoli eguali, saranno proporzionali à suoi cerchi; e trà di loro aueranno proporzione duplicata di quella delle suttese, ò pure di quella de' raggi, e le loro circonferenze saranno trà di loro come le suttese, ouero come raggi. Ora le porzioni di tal sorte si chiamino simili.

SIeno le due porzioni de' cerchi ABC, & FGH, ne' quali gli angoli B, e G sieno eguali. Tirati i raggi EA, EC, OF, & OH. Dico che la porzione ABC al cerchio ABCD, stà come la porzione FGH al cerchio FGHK; e le porzioni ABC, & FGH anno duplicata proporzione di quella de' raggi EA, & OF, ouero delle suttese AC, & FH; e le circonferenze ABC, FGH stanno come AC ad FH. Perche gli angoli B, e G si pongono eguali; Adunque *a* i loro doppi al centro E, & O saranno eguali; e perciò *b* i quattro angoli retti a gli angoli eguali E, & O aueranno la medesima proporzione; ma come *c* i quattro retti all'angolo E, cosi stà il cerchio ABD al settore

a prop. 13. del 2.
b prop. 3. del 3.
d *Dalla prop. 11. di questo.*

tore AECD; & eziandio come i quattro retti all'angolo O, così stà il cerchio FGK al settore FOHK. Adunque *d* come il cerchio ABC al settore AECD, così starà il cerchio FGH al settore FOHK. E permutando *e* come il cerchio ABD al cerchio FGK, così starà il settore AECD al settore FOHK: ma *f* anno i cerchi trà di loro proporzione duplicata de' raggi EA ad OF, Adunque *g* i settori aueranno la medesima proporzione duplicata del raggio BA ad OF; e sono *h* i triangoli AEC, & FOH simili (per essere isosceli, & hauere gli angoli alla cima E, & O eguali) adunque *i* il triangolo EAC, al triangolo OFH hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio EA al raggio OF, ouero la suttesa AC alla FH. Laonde *k* come il settore EADC al settore OFKH, così stà il triangolo EAC al triangolo OFK. Si che *l* la rimanente porzione ACD alla porzione FKH, auerà la medesima proporzione de i settori, ò pure de' cerchi; e perciò *m* l'altra porzione ABC alla porzione FGH, auerà eziandio la medesima proporzione del cerchio ABD al cerchio FGK, ò *n* pure auerà proporzione duplicata del raggio EA al raggio OF, ouero della suttesa AC alla suttesa FH.



d *prop. 7. del 3.*
e *prop. 14 del 3.*
f *prop. 12. di questo.*
g *prop. 7. del 3.*
h *prop. 4. del 4.*
i *prop. 15. del 4.*
k *prop. 7. del 3.*
l *prop. 15. del 3.*
m *Dalla stessa.*
n *prop. 7. del 3.*

Finalmente perche gli angoli à i centri AEC,

o Dalla prop. 11. di questo. FOH sono eguali: adunque *o* tutta la circonferenza del cerchio ABCA all'arco ADC, stà come i quattro retti all'angolo AEC, ouero *p* all'angolo a lui eguale FOH: e parimente tutta la circonferenza del cerchio FGHF all'arco FKH ha la medesima proporzione, che anno i quattro retti all'angolo FOH: per lo che *q* come la circonferenza del cerchio ABCA all'arco ADC, così starà la circonferenza del cerchio FGHF all'arco FKH. E permutando *r* la circonferenza del cerchio ABD alla circonferenza del cerchio FGK, sta come l'arco ADC all'arco FKH; e perciò *s* la rimanente circonferenza ABC alla rimanente FGH, stara come tutta a tutta; ma tutta *t* la circonferẽza ABD a tutta la circonferenza FGK, stà come il raggio EA al raggio OF, ouero come la suttesa AC alla suttesa FK (auuenga che la AC alla FH era come la EA alla OF) adunque *u* la circonferenza ABC alla circonferẽza FGH, stà come la suttesa AC alla retta suttesa FH, ò pure come il raggio AE al raggio FO, come fù proposto. Si chiamino ora le porzioni ABC, & FGH contenenti gli angoli eguali B, e G simili trà di loro.

p prop. 3. del 3.

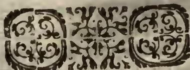
q prop. 7. del 3.

r prop. 12. del 3.

s prop. 15. del 3.

t prop. 14 di questo.

u prop. 7. del 3.



PRO-

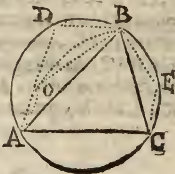
PROPOSIZIONE XVI.

TEQREMA IX.

In qualsiuoglia triangolo, l'angolo maggiore al minore hà maggior proporzione, che il lato opposto al l' angolo maggiore, non hà al lato opposto all' angolo minore. *Di Tolomeo nell' Almag. lib. 1. c. 9.*

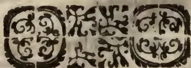
NEl triangolo ABG sia l'angolo C maggiore, e l'angolo A minore. Dico che l'angolo C hà maggior proporzione all'angolo A di quella, che hà il lato AB al lato BC. Intorno al triangolo *a* descriuasi il cerchio ABC, e si seghi l'arco BC doue si voglia nel punto E: e si faccia *b* l'arco BD eguale a BE, e si cõgiugano le rette linee CE, BE, AD, BD. E perche *c* l'arco ADB, al quale insiste l'angolo maggiore C è maggiore dell' arco BEC; e gli archi BD, e BE sono eguali; adunque l'arco rimanente AD sarà maggiore del rimanente arco CE, e perciò *d* l'angolo ABD sarà maggiore dell' angolo CBE. Si faccia adesso *e* l'angolo ABO eguale al minore angolo EBC; l'angolo dũque ABD sarà maggiore dell'angolo ABO; e perciò la ret-

a *prop.* 5. *di questo.*
b *dalla prop.* 16. *del* 2.
c *dalla stessa.*
d *Dalla prop.* 17. *del* 2.
e *prop.* 24 *del* 1.



ta BO feghera la retta AD nel punto O, posto tra A, e D; e per questo il punto O sarà dentro la porzione del cerchio ADB. Descriuasi *f* per i trè punti A, O, e B la circonferenza del cerchio AOB, ella cadera dentro la porzione ADB. E perche ne' triangoli AOB, e CEB *g* i due angoli OAB, ECB sono eguali (insistendo nelle eguali circonferenze BD, e BE); e parimente i due angoli OBA, EBC sono eguali; adunque *h* gli altri angoli AOB, e CEB saranno eguali; e perciò la circonferenza *i* AOB alla circonferenza BEC, sarà come la suttesa AB alla suttesa retta linea BC; e l'arco *k* ADB è maggiore dell'arco AOB (essendo questo contenuto da quello). Adunque *l* l'arco ADB hà maggior proporzione al medesimo arco BC, che l'arco AOB, *m* e perciò l'arco ADB all'arco BEC, auerà maggior proporzione, che la retta linea AB alla retta BC. Et è l'angolo *n* BCA all' angolo BAC, come l'arco ADB all' arco BEC, adunque *o* l'angolo BCA all'angolo BAC, hà maggior proporzione di quella, che s'abbia la sottesa AB alla sottesa retta linea BC. Il che bisognaua dimostrare.

f Dalla prop. 16. del 2.
g Dalla prop. 17. del 2.
h Dalla prop. 18. del 1.
i prop. 15. di questo.
k Assio. di questo.
l prop. 2. del 3.
m prop. 6 del 3.
n prop. 11 di questo.
o prop. 6. del 3.



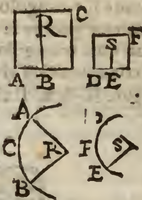
PRO-

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA X.

Frà due figure simili regolari, ò pure trà due cerchi, ò settori simili, è medio proporzionale il triangolo, la cui altezza è eguale al raggio dell' vna, e la base è eguale al perimetro dell' altra.

SIano due qualunque figure regolari simili trà di loro, ouero due settori simili, ò due cerchi R, & S, i raggi de' quali siano RB, & SE; e sia il triangolo rettangolo GHM, la di cui altezza GH sia eguale al raggio SE d'vna delle figure S, e la base HM sia eguale a BAC perimetro dell' altra figura R. Dico il triangolo GHM esser medio proporzionole trà le figure R, & S. Si *a* faccia l'altezza NH eguale al raggio RB, e la base HO eguale al perimetro EDF, e si congiungano le rette NM, e GO; perche nelle simili figure regolari, ouero ne' settori simili, ò pure ne' cerchi R, & S, come *b* il raggio RB al raggio SE, così sta il perimetro ABC al perimetro DEF, & è la NH eguale alla RB, e la GH eguale alla SE, e la HM eguale al perimetro ABC, e similmēte HO eguale a DEF.



a prop. 3. del 1.

b prop. 14 di questo.

c prop. 3. del 3.

d Dalla prop. 1. del 4.

Adunque *c* come NH ad HG, così stà MH ad HO; ma come l'altezza *d* NH a GH, così stà il triangolo NHM al triangolo GHM (auendo la medesima base HM) *e* come la base MH alla base HO, ouero *e* come NH a GH, così stà il triangolo GHM al triangolo GHO. Adunque il triangolo GHM è medio proporzionale trà due triangoli NHM, e GHO; ma il *f* triangolo rettangolo HNM è eguale alla figura R, essendo cōtenuto dal raggio, e dal perimetro della detta figura R, e parimente il triangolo GHO è eguale alla figura S; adunque *g* come la figura R al triangolo GHM, così stà il triangolo GHM alla figura S; e perciò il triangolo GHM è medio proporzionale trà le figure R, & S. Il che bisognaua &c.

e prop. 7. del 3.

f dalla pr 13. di qu.

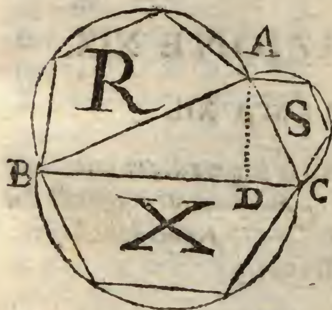
g prop. 3. del 3.

PRO:

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XI.

Ne' triangoli rettangoli qualunque figura rettilinea, ouero circolare descritta sopra l'ipotenusa, ò lato sottendente, l'angolo retto è eguale à due figure simili à quella, e similmente descritte sopra i lati contenenti angolo retto. *D' Eucl. la 47. del 1. è la 31. del 6.*



SIa il triangolo ABC rettangolo in A, e sopra i trè suoi lati si descriuano trè qualunque figure X, R, & S simili trà di loro, e similmente poste, ò sieno settori, ò cerchi, ò fasce, ò quadrati, ò altre figure rettilinee. Dee dimostrarsi la figura X descritta sopra l'ipotenusa BC esser eguale alle due figure R, & S a loro simili, e similmente descritte sopra i lati BA, & AC. Dall'angolo retto *a* A, si tiri la perpendicolare AD sopra la BC. E manifesto, che la *b* CB alla BD ha duplicata proporzione di quella, che hà la CB alla BA; e parimente la BC alla CD ha duplicata proporzione di quella, che ha la BC alla CA. E perche la *c* X alla R

a prop. 11. del 1.
b prop. 9. del 4. & prop. 19. del 3.
c prop. 17 del 4.

(per essere figure simili, e similmente poste) hà duplicata proporzione di quella del lato BC al suo omologo BA. Adunque *d* la X alla R, stà come la CB alla BD. Per la medesima ragione la figura X alla figura S auerà la medesima proporzione, che la BC alla CD. Adunque la figura *e* X alle due figure R, & S auerà la medesima proporzione, che la BC alle due BD, e DC insieme prese; ma la BC è eguale alle due BD, e DC. Adunque *f* la figura X è eguale alle due figure R, & S insieme prese. Il che bisognaua &c.

d *Dalla prop. 19. del 3.*
e *Dalla prop. 22. del 3.*
f *Corol. della pr. 16. del 3.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XII.

Di Eucl. la 4. del 2.

Il quadrato descritto sopra la somma di due rette linee è eguale alla somma di due quadrati di esse con due parallelogrammi rettangoli contenuti dalle stesse rette linee.

SOpra le rette AB, BC, e sopra la loro somma AC siano descritti i quadrati R, S, & M. Dico che il quadrato M è eguale alla somma de i quadrati R, & S, con due rettangoli contenuti da AB in BC. Sopra la AC come diametro descriuasi il semicerchio ADC, e *a* si eleui dal punto B la retta BD perpendicolare ad AC, che incontri la circonferenza in D, e si congiungano le rette linee AD, e DC, e *b* sopra le stesse si descriuano i quadrati X, Z, & Y. Perche nel triangolo

a *prop. 10 del 1.*
b *prop. 34 del 1.*

golo ADC rettangolo *c* in D (per essere nel semicerchio) il *d* quadrato M descritto sopra la ipotenusa AC, è eguale a i due quadrati X, & Y descritti sopra i lati AD, e DC. Ma nel triangolo ADB rettangolo in B, *e* i due quadrati R, e Z descritti sopra i lati AB, e DB sono eguali al quadrato X descritto sopra l'ipotenusa AD, e parimente nel triangolo DBC rettangolo in B, *f* i due quadrati S, e Z sono eguali al quadrato Y; adunque i quattro quadrati R, S, & il Z due volte preso, sono eguali à i due quadrati X, & Y insieme presi; & a questi stessi quadrati X, & Y, prima era eguale il quadrato M, adunque il quadrato M sarà eguale a quattro quadrati, cioè ad R, & S, & al doppio di Z. Poi perche nel triangolo ADC dall'angolo retto D cade la DB perpendicolare alla AC, *g* sarà la AB alla BD, come la BD alla BC; e però *h* il quadrato Z della media proporzionale BD, sarà eguale al parallelogrammo rettangolo ABC contenuto dall'estreme. Per la qual cosa il quadrato M sarà eguale alla somma de i quadrati R, & S, con il doppio del rettangolo ABC. Il che &c.



c *prop. 20 del 2.*
d *prop. 18 di questo.*
e *Per l'istessa.*
f *L'istessa*
g *prop. 9. del 4.*
h *Corol. 2. della prop. 14. del 4.*

PRO-

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XIII.

D' Eucl. la 7. del 2.

Il quadrato deſcritto ſopra alla differenza di due rette linee è eguale alla differenza di due quadrati di eſſe da due rettangoli contenuti dalle ſteſſe.

SIa la retta AB maggiore, e BC la minore, e la loro differenza AC, e ſopra di eſſe ſiano deſcritti i quadrati R, S, M. Dico che il quadrato M deſcritto ſopra la differenza AC è eguale all' eceſſo di due quadrati R, & S deſcritti sù le ſteſſe rette linee, ſopra il doppio del rettangolo ABC contenuto dalle ſteſſe.



Sopra il diametro AB deſcriuaſi, come prima, il ſemicerchio ADB, e *a* ſi eleui la perpendicolare CD, e ſi congiungano le rette AD, BD, *b* e deſcriuaſi ſopra eſſe i quadrati X, Y, e Z. Perche *c* il quadrato R della ſomma delle rette AC, e CB è eguale alla ſomma de' quadrati S, & M, con il doppio del quadrato Y. Adunque aggiunto communemente il quadrato S, ſaranno i due quadrati R, & S inſieme preſi eguali al quadrato M al doppio del quadrato S, con il doppio del quadrato Y inſieme preſo: ma *d* nel triangolo rettãgolo BCD il doppio del quadrato Z deſcritto

a *prop.* 10 *del* 1.

b *prop.* 34 *del* 1.

c *Dalla prop.* 19. *di queſto.*

d *prop.* 18 *di queſto.*

to

to sopra l'ipotenusa, è eguale al doppio del quadrato S, con il doppio del quadrato Y: adunque i due quadrati R, e S insieme sono eguali al quadrato M, con il doppio del quadrato Z; ma *e* la BD è media proporzionale frà le AB, e BC, e però *f* il quadrato Z della media proporzionale, sarà eguale al rettangolo ABC contenuto dall'estreme. Laonde i due quadrati R, & S saranno eguali al quadrato M, con il doppio del rettangolo ABC. Per la qual cosa il quadrato M descritto sopra la differenza AC, sarà eguale all'eccesso de' due quadrati R, & S sopra il doppio del rettangolo ABC. Il che bisognaua dimostrare.

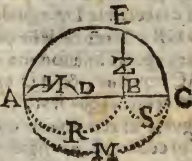
e Dalla prop. 10. del 4.
f Corol. 2. della pr. 14. del 4.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIV.

Il quadrato descritto sopra la somma di due rette linee è eguale al quadrato della differenza di esse con quattro parallelogrammi rettangoli contenuti dalle medesime.

Sia di nuouo la retta AB maggiore, e BC minore, e *a* fatta la BD eguale alla minore BC, sarà AC la somma, & AD la differenza delle medesime rette AB, BC: e *b* si descriuano sopra le



a prop. 3. del 1.
b prop. 34. del 1.

le dette rette linee i quadrati R, S, & M sopra la somma, & N sopra la differenza. Dico che il quadrato M sarà eguale al quadrato N insieme con quattro parallelogrammi rettangoli ABC. Perche il *c* quadrato M descritto sopra la somma di AB, e BC, è eguale a i quadrati R, & S, con il doppio del rettangolo ABC, & *d* i due quadrati R, & S sono eguali al quadrato N della differenza AD, insieme con due rettangoli ABC. Adunque il quadrato M sarà eguale al quadrato N, insieme con quattro rettangoli ABC. Il che bisognaua &c.

c prop. 19 di questo.
d prop. 20 di questo.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XV.

Di Eucl. la 5. e la 6. del 2.

La differenza di due quadrati è eguale al rettangolo contenuto dalla somma, e dalla differenza de i loro lati.

Siano le rette AB, e la sua parte AC, lati de' due quadrati R, & S; e nella AB prodotta verso A *a* facciasi la DA eguale ad AB, verrà ad essere la CB differenza delle due AB, & AC, ma la CD sarà eguale alla somma di AB, & AC (per esser AC comune, & AD eguale alla AB) dico che l'eccesso del quadrato R sopra il quadrato S, sarà eguale al rettangolo contenuto da DC in CB. Col centro A, e raggio AB, ò pure AD descriuasi il semicerchio BED; e *b* si eleui da C la retta CE per-

a prop. 3. del 1.
b prop. 10 del 1.

perpendicolare al diametro DB, che incōtri la circonferenza in E; e cōgiungasi la retta AE, e sopra le AE, e CE descriuansi i quadrati O, & M. Perche *d* nel triangolo AEC rettangolo in C, il quadrato O descritto sopra l'ipotenusa AE, è eguale a due quadrati S, & M descritti sopra i lati AC, e CE intorno all'angolo retto: ma le AB, & AE sono eguali, per esser raggi dell'istesso cerchio; adunque *e* il quadrato R sarà eguale al quadrato O, e per questo il quadrato R sarà eguale a due quadrati S, & M: per lo che la differenza de' quadrati R, & S sarà eguale al quadrato M; ma *f* perche nel semicerchio la CE perpendicolare al diametro è media proporzionale trà le DC, e CB porzioni del diametro, *g* sarà il quadrato M descritto sopra la media eguale al rettangolo DCB contenuto dall'estreme. Per la qual cosa l'eccesso del quadrato R sopra il quadrato S, sarà eguale al rettangolo DCB. Il che si doueua &c.

c prop. 34 del 1.

d prop. 18 di questo.

e Dalla prop. 17. del 4.

f Dalla prop. 20. del 2. e 9. del 4.

g Corol. 2 della pr. 14. del 4.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIII.

TEORIMA XVI.

D'Eucl. la 9. e 10. del 2.

Delle figure circolari, ò retilinee simili, e similmente descritte sopra due rette lnee, e sopra la somma, e differenza loro; quella dela somma, e quella della differenza insieme prese, sono eguali al doppio delle figure de scritte sopra le stesse rette linee.

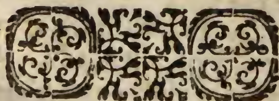
SOpra le rette linee diseguali AB, e BC, e sopra la loro somma AC, e sopra la loro differenza AD siano descritte qualsivoglia figure circolari, ò rettilinee simili, e similmente poste R, S, M, & N. Dico le due figure M descritta sopra l'aggregato, & N sopra la differenza insieme prese, esser eguali al doppio delle due figure R, & S. Perche essendo le figure quadrati, *a* sarà il quadrato di AC eguale al quadrato di AD, con quattro rettangoli ABC. Adunque aggiunto communemente il quadrato di AD, saranno i quadrati di AC, e di AD insieme presi, eguali a due quadrati di AD, con quattro rettangoli ABC: ma *b* i quadrati delle rette linee AB, e BC sono eguali al quadrato di AD, differenza con due rettangoli ABC.

a prop. 21. di questo.

b prop. 20 di questo.

ABC. Adunque due quadrati di AB, con due quadrati di BC, saranno eguali a due quadrati di DA con quattro rettangoli ABC; ma a gli stessi sei spazi erano eguali i quadrati di AC, e di AD insieme presi: adunque il quadrato di AC cõ il quadrato di AD, sono eguali a due quadrati di AB con due quadrati di BC. Sendo poi le figure M, N, R, & S cerchi, ò qualunque altre figure simili, e similmente poste sopra le stesse rette linee, perche i *c* quadrati descritti sopra le stesse rette linee anno trà loro la stessa proporzione, che le figure simili M, N, R, & S, e similmente descritte sopra le stesse: adunque *d* la proporzione di egualità, che anno i quadrati di AC, e di AD insieme presi al doppio del quadrato di AB, con il doppio del quadrato BC, la medesima proporzione aranno le figure M, N insieme al doppio delle figure R, & S insieme prese; e perciò le figure M, & N saranno eguali al doppio della figura R, con il doppio della figura S. Il che bisognaua &c.

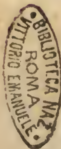
c *Dalla prop* 17. *del* 4 *e* 12 *di questo.*
d *prop.* 23 *del* 3.



PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XVII.

D' Eucl. la 4. del 13. *Se sopra tutta, e sopra le porzioni di vna retta linea diuisa secondo la estrema, e meza proporzione saranno descritte figure circolari, ouero rettilinee simili trà di loro, e similmente poste le due figure di tutta, e della minor porzione insieme sono triple della figura descritta dalla maggior porzione. E se le due figure di tutta la linea, e della minor porzione saranno triple di quella, che vien descritta dalla porzion maggiore; sarà tutta la retta linea segata secondo l'estrema, e meza proporzione.*



SIa la retta AB segata secondo l'estrema, e meza proporzione nel pūto C, la di cui maggior porzione AC; e siano descritte sopra la AB, AC, e CB tre circolari figure, ò rettilinee R, M, & S simili trà di loro, e similmente poste. Dico che la figura R di tutta insieme con la figura S della minor porzione, sono triple della figura M descritta sopra la porzion maggiore. Perche se le dette figure saranno quadrati, i *a* quadrati descritti sopra le diseguali AB, e BC, saranno eguali al quadrato della differenza AC, con il doppio del rettangolo ABC, ma *b* è il quadrato della AC eguale al rettangolo ABC (per esser quella media proporzionale frà le AB, e BC) adunque i quadrati di AB, e di BC insieme presi, sono eguali al

a prop. 20. di questo.

b Corol. 2 della pr. 14. del 4.

G B

